テキスト1

絵とともに学ぶ中学数学

数・式の計算・関数・方程式

おとといのジョー　著

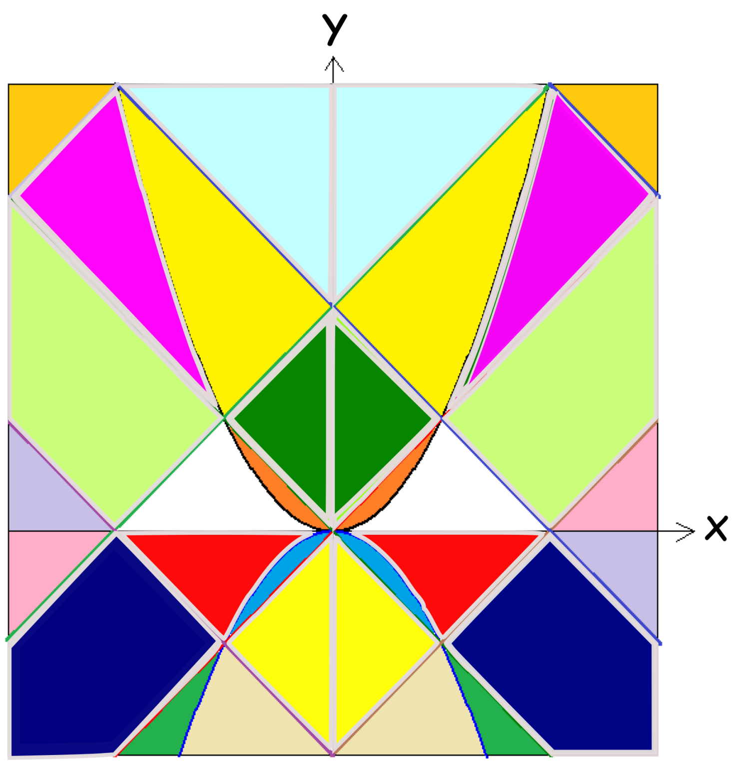
はじめに

図やグラフ (絵) を描きながら数学を学びましょう。きれいな絵がかけると，答えが簡単にわかることがありますよね。問題を解くための美しいきれいな絵を描いてみましょう。このテキストは，絵をふんだんにとりいれて書いてみました。読者の皆さんも，このテキストよりももっときれいな絵を描いて問題を解いて見て下さい。

数式でも，単純できれいな式に出会うことがありますよね。自分でみちびいた式がきれいな格好になった時などうれしくなりますよね。そんな数学の問題に出会えるといいですね。

数学の問題を解く道すじはたくさんあります。式の変形だけで解けるものもあるし，図形だけで解けることもあるし，両方必要になるときもあるでしょう。答えに至る道も１つではなく，いっぱいあります。そのうちの１つをあなた自身の考えで発見して下さい。

Let ’ s play mathematics !



放物線と直線のパターン

もくじ

第１章　数と演算について

§ 1.1　数の集合

♠［記号などの約束］

$a \cdot b$　…　$a \times b = ab$ のこと。数が３つ以上になっても同様；

（例）　$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$

c/d　…　$c \div d = \dfrac{c}{d}$ のこと。　（例）　$3/2 = 1.5$,　$5/6 = 0.833333\cdots$

a^n　（a の n 乗）　…　a を n 回かけた数。　(例) $5^2 = 25$,　$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} = 0.0625$$ ♠

数字は，小さい頃から　“１つ　２つ　３つ　…　”という感じで，もののかずを数えるときに，使ってきましたよね。このような数（すう）は自然数とよばれています。あなたは，成長とともに使う数も増えてきて，ゼロ，負の数，分数など日々の生活の中で利用してきたことと思います。ここで，中学校で出てくる数を全部上げてみましょう。大きく分けて４つのタイプの数（それぞれ集合という）があります。

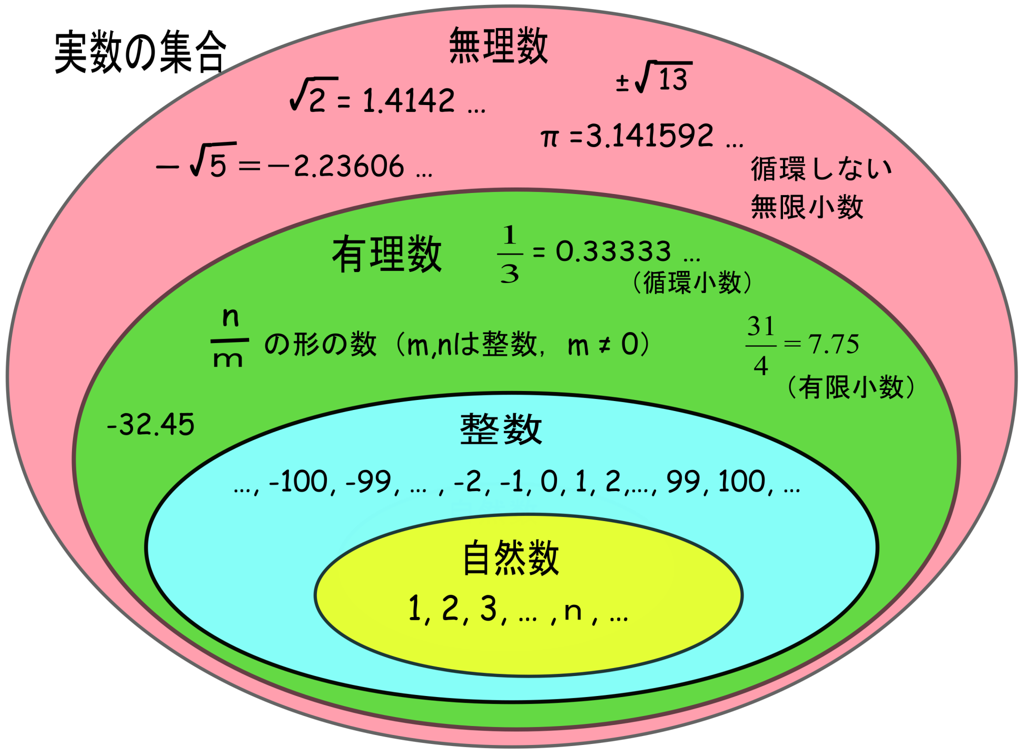


図 1.1．数の集合

■［数の性質］

★ 自然数，整数，有理数，無理数をひっくるめて実数（じっすう）とよぶ。数って，人間が作ったものじゃないよね。たぶん，この宇宙に最初からあるよね。

★ 整数は，自然数にゼロ０と負の数を付け加えた集合です。数は無限個（夜空の星のかずよりも

もっと多い）ありますよ。

★ 有理数は分数の形の数ですが，有限小数，例えば，

$$-\frac{5}{2}=-2.5,\quad \frac{12}{3}=4,\quad \frac{617}{5000}=0.1234,\quad \frac{355}{113}=3.14159292\quad \text{など}$$

と循環する無限小数，例えば，

$$-\frac{50}{9}=-5.55555\cdots\ =-5.\dot{5},\qquad \frac{134}{333}=0.402402402\cdots=0.\dot{4}0\dot{2},$$
$$\frac{17}{35}=0.485714285714285\cdots=0.4\dot{8}5714\dot{2}\quad \text{など}$$

からなる。循環小数では，循環する数のかたまりの最初と最後の数字の上にドット（点）をつけることになっている。循環する数のかたまりが1けたのときは，ドットは1つでよい（最初の例）。

★ 無理数の 1 つ $\sqrt{a}\ (a>0)$ は，2 乗すると a になる正の数のことである。a の正の平方根。

(例） $\sqrt{16}=4,\quad (\pm\sqrt{7})^2=7,\quad -\sqrt{9}=-3,\quad \sqrt{450}=\sqrt{2\cdot 15^2}=\sqrt{15^2}\sqrt{2}=15\sqrt{2}.$

今後よく現れるであろう無理数は，円周率 π（円周の長さは，直径の何倍かという数）とネピアの数 e でしょう。覚えておけば何かの役にたつかも。

$\pi=3.141592653589793\ \cdots$ 　産医師異国に向こう産後厄 (やく) なく贅（さん）

$e=2.71828182845904523\ \cdots$ 　フナ 1 羽 2 羽 1 羽 2 羽死後食おーよ御 (ご) にいさん ■

1 つの直線上に，ゼロ 0（原点とよぶ）を中心にして一定間隔のめもりをつけ，それらに整数の値を対応づけたものを数直線とよぶ。1 つの数は数直線上の 1 点と対応する（下図参照)。

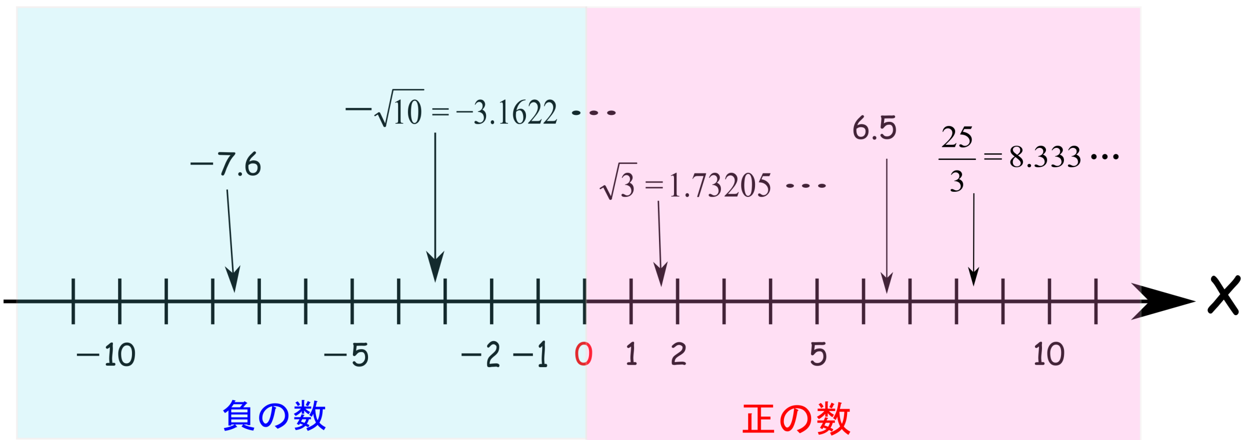


図 1.2. 数直線

■ [数直線と数についての性質]

★ 実数は無限個あり，各数は数直線上の 1 点と対応する。点に面積はない。数直線上の数は右に行くほど大きくなり，左に行くほど小さくなる。

★ 数直線上の 2 数 $a,\ b$ ($a<b$: a より b が大きい) 間の距離は $b-a$ である。すなわち，大きい数から小さい数を引いたものが 2 数間の距離である。特に，任意の数 a とゼロ 0 との距離を a の絶対値とよぶ。

(例） 2 数 2 と 15 との距離は $15-2=13$ である，

2 数 45 と -20 との距離は $45-(-20)=65$ である，
2 数 -7 と -33 との距離は $-7-(-33)=26$ である．
8 の絶対値は 8 である， -11 の絶対値は $11\ (=0-(-11))$ である．

★2 つ以上の数の大小関係をあらわすとき，不等号を用いる。

(例) $3<\pi<3.3$, $-5<-2<0$, $-\dfrac{4}{5}<-0.6<\dfrac{1}{3}$,
$a>0$ のとき，$a<2a<2.5\times a<\pi a$. ■

例題 1.1. (1) 5 つの数 -2.1, 0.7, $-\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{3}{4}$, -0.5 を小さい順に左から並べよ。

(2) 円周率 π は，不等式 $\dfrac{157}{50}<\pi<\dfrac{63}{20}$ を満たすことを示せ。

（注意）不等式とは，不等号で表された式のこと。

解答） (1) $-\dfrac{5}{2}=-2.5$, $\dfrac{3}{4}=0.75$ だから，

$$-\frac{5}{2} < -2.1 < -0.5 < 0.7 < \frac{3}{4}.\quad（答え）$$

(2) $3.14<\pi<3.15 \quad \cdots$ ① だから，① の第 1 項と第 3 項を分数で表すと

$$\frac{314}{100}=\frac{157}{50},\quad \frac{315}{100}=\frac{63}{20}\quad \cdots ②$$

①，② より， $\dfrac{157}{50}<\pi<\dfrac{63}{20}$. ♡

問 1.1. (1) 次の 2 数の距離を求めよ。(a) $-10,\ 2$ (b) $-7,\ -22$

(2) 4 つの数 3, e, $\dfrac{68}{25}$, $\dfrac{5}{2}$ の大小関係を不等号を使って表せ。

(3) 不等式 $\dfrac{7}{5}<\sqrt{2}<\dfrac{71}{50}$ がなりたつことを示せ。

§ 1.2 素数と素因数分解

♠ ★ 整数 a によって，$b=(\text{整数})\times a$ と表されるとき，b を a の倍数，a を b の約数という。
(例) $21=3\cdot 7$ だから，3 と 7 は 21 の約数。21 は 3 の倍数かつ 21 は 7 の倍数。

★ $120=4\cdot 5\cdot 6$ のように，1 つの自然数がいくつかの自然数の積で表されるとき，そのひとつひとつの数をもとの数の因数とよぶ。この例では，4，5，6 が 120 の因数。

★ 1 より大きい自然数が，それより小さい自然数の積で表せないとき素数という。
(素数の例）$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,\cdots,503,509,521,523,541,$
$\cdots,1009,1013,1019,1021,1031,1033,1039,1049,\ \cdots$ (1049 まで 176 個)
素数の約数は，1 と自分自身のみである。

★ 自然数を素数の積で表すことを素因数分解とよぶ。
(素因数分解の例） $66=2\cdot 3\cdot 11$, $90=2\cdot 3^2\cdot 5$, $100=2^2\cdot 5^2$
素数である因数を素因数という。 ♠

［注意］素数の個数は有限でしょうか無限でしょうか？ 隣り合う奇数がともに素数のとき，その組をふたご素数（例えば，$17,19$）といいます。ふたご素数の個数は有限でしょうか無限でしょうか？ ひまがあったら考えてね。お父さんと一緒に考えるのもいいかもね。

例題 1.2.（素因数分解） 84 と 1050 を素因数分解せよ。
解答）下図のように，素数で割り算をする。

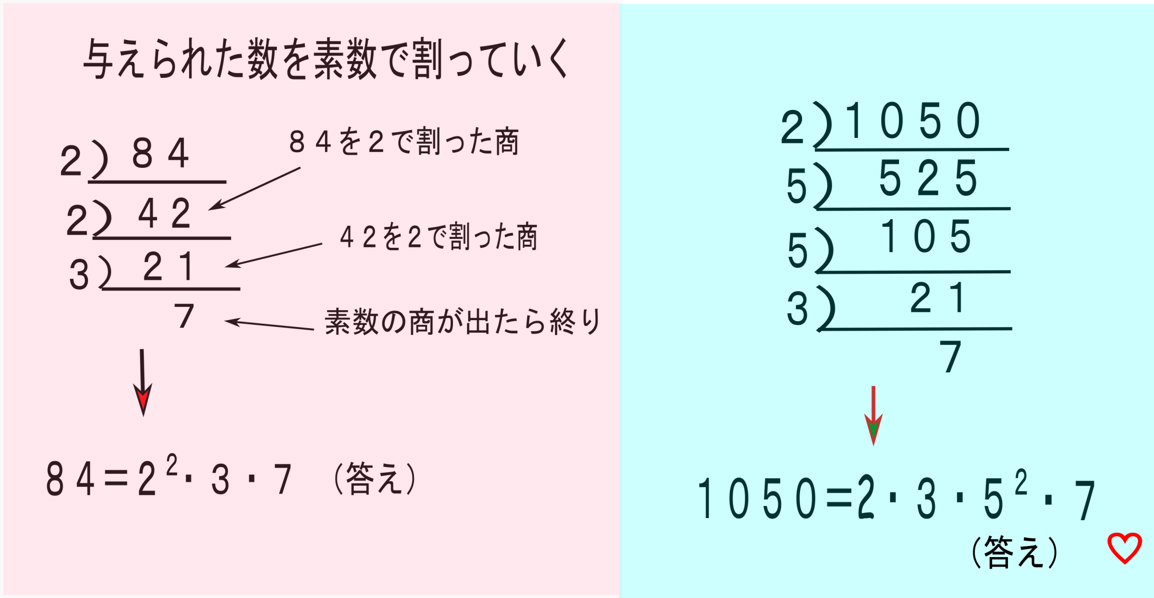


図 1.3. 素因数分解の計算

♠ ★ 2 つ以上の整数が与えられたとき，これらに共通な約数を**公約数**という。公約数の中で最大のものを**最大公約数**という。
★ 2 つ以上の整数が与えられたとき，これらに共通な倍数を**公倍数**という。公倍数の中で最小のものを**最小公倍数**という。 ♠

例題 1.3. (1) 2 数 18, 63 の最大公約数を求めよ。
(2) 3 つの数 6, 14, 30 の最小公倍数を求めよ。
(3) $\frac{1}{6} - \frac{5}{14} + \frac{7}{30}$ を計算して簡単にせよ。

解答）(1) $18 = 2 \cdot 3^2$, $63 = 3^2 \cdot 7$ だから，最大公約数は 3^2，すなわち 9.
(2) $6 = 2 \times 3$, $14 = 2 \times 7$, $30 = 2 \times 3 \times 5$ より，共通な因数は 1 つずつ，そうでないものは全部を選び積を作ればよい。$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$ が答えである。
(3) 各分母の最小公倍数で通分する。

$$\frac{1}{6} - \frac{5}{14} + \frac{7}{30} = \frac{35 - 5 \cdot 15 + 7 \cdot 7}{210} = \frac{35 - 75 + 49}{210} = \frac{9}{210} = \frac{3}{70}.$$ ♡

問 1.2. (1) 255 と 1098 を素因数分解せよ。
(2) 3 つの数 16, 96, 120 の最大公約数，最小公倍数を求めよ。

§ 1.3. 整数の性質

■ ［商と余りの関係］ 整数 a を整数 b で割ったとき，商が q 余りが r ならば，

$$a = qb + r \quad \cdots \quad ①$$

と表される。このとき，余り r は $0 \leqq r < b$ である。
（例） 20 を 7 で割ると，商は 2 で余りは 6 である： $20 = 2 \times 7 + 6.$ ■

例題 1.4. 以下のことがなりたつことを示せ。
(1) 連続する 2 つの整数の積は偶数である。

(2) 連続する 3 つの整数の和は 3 の倍数である。
(3) 3 けたの自然数の各位の数の和が 3 の倍数ならば，その自然数は 3 の倍数である。

証明）(1) 小さいほうの数を 2 で割ったとき，商が k 余りが 0 とすると，2 数は　$2k,\ 2k+1$。これらの積は $2k(2k+1)$ だから，2 の倍数（偶数）である。
また，小さいほうの数を 2 で割ったとき，商が k 余りが 1 とすると，2 数は　$2k+1,\ 2k+2$。これらの積は　$(2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$　だから 2 の倍数である。
(2)　連続する 3 つの整数のまん中の整数を n とすると，3 数は　$n-1,\ n,\ n+1$　である。これらの和は　$n-1+n+n+1 = 3n$　だから，3 の倍数である。
(3) 3 けたの自然数を abc と書こう（a, b, c は 0 と 9 の間の数で，$a \neq 0$）。仮定より　$a+b+c = 3n$　(n は整数) とおく。3 けたの自然数は　$100a+10b+c$　であり，

$$100a + 10b + c = 99a + 9b + a + b + c = 99a + 9b + 3n = 3(33a + 3b + n).$$

となるので 3 の倍数である。 $\heartsuit$

例題 1.5. (1) 200 の約数をすべて求め，それらの和を求めよ。
(2) 2 から 1000 までの自然数で，2 の倍数，3 の倍数はそれぞれいくつあるか。また，3 の倍数であって 2 の倍数でないものはいくつあるか。
(3) 1 から n までの自然数の和 S を求めよ。ただし，n は 1 より大きい自然数。

解答）(1) 最初に 1 と自分自身 200 も約数であることに注意せよ。素因数分解すると，$200 = 2^3 \cdot 5^2$ だから，約数を順序よく並べると，

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3, \quad 1\cdot 5,\ 2\cdot 5,\ 2^2\cdot 5,\ 2^3\cdot 5, \quad 1\cdot 5^2,\ 2\cdot 5^2,\ 2^2\cdot 5^2,\ 2^3\cdot 5^2.$$

全部で 12 個ある。これらの約数の和は　$(1+5+5^2)(1+2+2^2+2^3) = 31\cdot 15 = 465$　である。
(2) 2 の倍数は　$2k$　$(k = 1, 2,\ \cdots, 500)$　と表せるので，500 個ある。同様に，3 の倍数は　$3k$　$(k = 1, 2,\ \cdots, 333)$　だから 333 個ある。3 の倍数であって，2 の倍数でないものは，3 の倍数から 6 の倍数を除けばよい（図 1.4 の左参照）。6 の倍数は　$6k$　$(k = 1, 2,\ \cdots, 166)$　だから 166 個。よって答えは　$333 - 166 = 167$　(個).
(3) 図 1.4 に計算と解答を示す。 $\heartsuit$

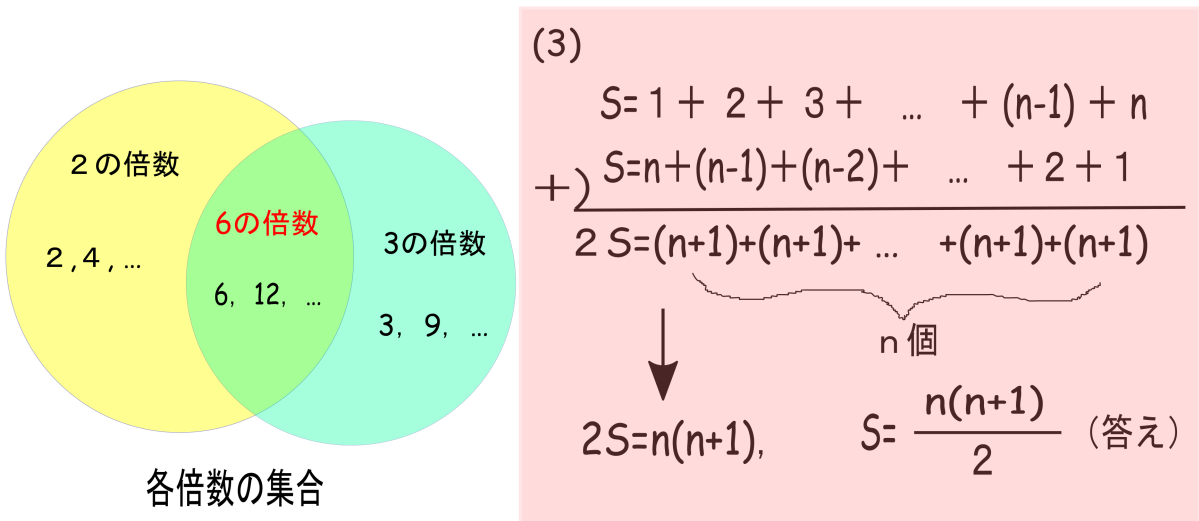


図 1.4. (2) 倍数の集合 (3) 計算と答え

問 1.3. (1) 90 と 62 をある自然数 n でわったとき，6 余るという。このような自然数 n を全て求めよ。

(2) $\dfrac{5880}{n}$ が自然数の平方となるような，もっとも小さい自然数 n の値を求めよ。

(3) 8 でわっても 14 でわってもわりきれる整数のうち，300 にもっとも近い数を求めよ。

(4) 999 までの奇数の和　$1+3+5+\ \cdots\ +999$　を求めよ。

§ 1.4. 式の計算

♠［いろいろな式］

★ 数や文字についての乗法だけで作られた式を**単項式**という。（例） $5x,\ -\dfrac{1}{3}a^2,\ 2xy$ は単項式。

単項式の和の形の式を**多項式**という。多項式の 1 つ 1 つの単項式を**項**とよぶ。

（例） $x^2-3xy+2m-5pq+4,\ \dfrac{3}{4}t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y^2$ 　は多項式。最初の多項式は 5 つの項よりなる。

★ 単項式の**次数**とは，かけ合わされている文字の個数である。**多項式の次数**とは，各項の次数のうちでもっとも大きいものをいう。

（例） $6a^3$ は 3 次，$2x$ は 1 次の単項式。多項式 x^2-5x+6 の次数は 2。

★2 次の多項式　$5x-2y-\dfrac{1}{2}pq+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{3}{5}y+3pq\ \cdots$ ①　において，$5x$ と $\dfrac{1}{3}x$ は**同類項**とよばれる。$2y$ と $\dfrac{3}{5}y$ および $3pq$ と $\dfrac{1}{2}pq$ もそれぞれ同類項である。同類項どうしは，足し算，引き算ができて，式① は　$\dfrac{16}{3}x-\dfrac{7}{5}y+\dfrac{5}{2}pq$　となる。

★ $A,\ B$ が単項式または多項式のとき，　$A\div B=A\times\dfrac{1}{B}=\dfrac{A}{B}$　$\cdots$ ②　がなりたつ。

（例）　$(14x-21y)\div(-7)=\dfrac{14x-21y}{-7}=-\dfrac{14}{7}x-\dfrac{21}{-7}y=-2x+3y.$ ♠

例題 1.6. 次の式を計算して簡単にせよ。

(1) $\dfrac{3a+b}{4}-\dfrac{5a-2b}{6}$　　(2) $9x^2y\times\dfrac{1}{2}y\div(-3xy^2)$

★★★（自分の解答かいてみて！おとといのジョーの解答は次ページ）

解答) (1)

$$\frac{3a+b}{4}-\frac{5a-2b}{6}=\frac{3(3a+b)-2(5a-2b)}{12}$$

4と6の最小公倍数12で通分

$$=\frac{9a+3b-10a+4b}{12}=\frac{-a+7b}{12}\quad\text{(答え)}$$

分子は同類項どうしの計算

(2)

$$9x^2y\times\frac{1}{2}y\div(-3xy^2)=\frac{9x^2y\times\frac{1}{2}y}{-3xy^2}=\frac{9x^2y\times y}{-6xy^2}=\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\overset{x}{\cancel{x^2}}\cancel{y\times y}}{-\underset{2}{\cancel{6}}\cancel{xy^2}}$$

分数の形に　　分母,分子に2をかける　　共通のものを約す

$$=-\frac{3}{2}x\quad\text{(答え)}$$

図 1.5. 計算のしかた

■［式の展開公式］

(1) 分配法則： $a(b+c)=ab+ac,\quad (a+b)c=ac+bc \quad\cdots$ ③

(2) A, B は単項式または多項式のとき，2 項からなる 2 つの積の展開式：

$$(A+B)(C+D)=AC+AD+BC+BD \quad\cdots \text{④}$$

（例） $(2x-5y)(3x+2y)=6x^2+4xy-15xy-10y^2=6x^2-11xy-10y^2.$

以下，x の 2 次式の展開式（a, b は定数とする）：

(3) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab \quad\cdots$ ⑤

(4) $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2,\quad (x-a)^2=x^2-2ax+a^2 \quad\cdots$ ⑥

(5) $(x+a)(x-a)=x^2-a^2 \quad\cdots$ ⑦

（例） $(x-5)(x+6)=x^2+x-30,\quad (x-6)^2=x^2-12x+36,\quad (x+4)(x-4)=x^2-16.$ ■

例題 1.7. 次の式を展開せよ。

(1) $(6a^2b-18ab+12ab^2)\div 3ab+2(3-2b)$

(2) $\left(\frac{4}{3}x+5\right)\left(\frac{4}{3}x-5\right)$

(3) $3(x-y)^2-(2x+y)(x-3y)$

解答） (1)

$$(6a^2b-18ab+12ab^2)\div 3ab+2(3-2b)=\frac{6a^2b}{3ab}-\frac{18ab}{3ab}+\frac{12ab^2}{3ab}+6-4b=2a-6+4b+6-4b=2a$$

(2) $A=\frac{4}{3}x$ とおく。 $\left(\frac{4}{3}x+5\right)\left(\frac{4}{3}x-5\right)=(A+5)(A-5)=A^2-25=\frac{16}{9}x^2-25.$

（A は元の式にもどす）

(3) $3(x-y)^2-(2x+y)(x-3y)=3(x^2-2xy+y^2)-(2x^2-6xy+yx-3y^2)$

（$yx = xy$ に注意して）

$= 3x^2 - 2x^2 - 6xy + 5xy + 3y^2 + 3y^2 = x^2 - xy + 6y^2.$ ♡

問 1.4. 次の式を展開せよ。

(1) $(x-3)(x+7)$　(2) $(2m-3n)^2 - (2m+3n)^2$　(3) $(2x+y-3)(2x-y+3)$

§ 1.5. 因数分解

展開された多項式を，2 つ以上の多項式の積に分解することを因数分解という。前節の展開公式の逆をたどれば因数分解が可能である。以下に公式として示す。

■ 因数分解の公式

(1)　$A,\ B,\ C$ が単項式または多項式のとき：

$$AB + AC = A(B+C), \quad AC + BC = (A+B)C \quad \cdots \quad ①$$

以下，x の 2 次式の場合の式をかく。$a,\ b$ は定数または同類項の単項式。

(2)　$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b) \quad \cdots \quad ②$$

(3)　$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2, \quad x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2 \quad \cdots \quad ③$$

(4)　$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a) \quad \cdots \quad ④$$ ■

式②による因数分解は重要です。これを使いこなせるようになると因数分解は楽しくなるでしょう。x の 2 次式　$x^2 + (a+b)x + ab$　の x の係数は 2 数の和，定数項は 2 数の積。すなわち，たして□，かけて△ となる 2 数　$a,\ b$　がわかれば因数分解がわかる。

（例）(1)　$x^2 + 5x + 6$　は，たして 5，かけて 6 となる 2 数は，2 と 3 なので　$(x+2)(x+3)$ と因数分解できる。

(2)　$x^2 - 6x - 16$　は，たして -6，かけて -16 となる 2 数は，-8 と 2 なので　$(x-8)(x+2)$ と因数分解できる。

(3)　$x^2 - 10x + 21$　は，たして -10，かけて 21 となる 2 数は，-3 と -7 なので　$(x-3)(x-7)$ と因数分解できる。

例題 1.8. 次の式を因数分解せよ。

(1)　$3x^2 - 18x + 27$　(2)　$4x^2 - 9y^2$

(3)　$2x^2y - 24xy - 56y$　(4)　$x^2 + 9x - 2xy - 9y + y^2 - 36$

★★★（自分の解答かいてみて！おとといのジョーの解答は次ページ）

解答）(1)　$3x^2-18x+27=3(x^2-6x+9)=3(x-3)^2$　　③の利用

(2)　$X=2x, Y=3y$　とおくと，

$4x^2-9y^2=X^2-Y^2=(X-Y)(X+Y)=(2x-3y)(2x+3y)$　　④の利用

（X, Y はもとの式にもどす）

(3)　$2x^2y-24xy-56y$　　……　共通因子2yでくくる

$=2y(x^2-12x-28)$　　……　②の利用

$=2y(x\underline{-14})(x\underline{+2})$　　$\begin{cases}\text{たして　-12}\\\text{かけて　-28}\end{cases}$ となる2数は <u>-14 と 2</u>

(4)

$x^2+9x-2xy-9y+y^2-36=x^2-2xy+y^2+9x-9y-36$

$=(x-y)^2+9(x-y)-36$　　……　$Y=x-y$　とおく

$=Y^2+9Y-36=(Y\underline{+12})(Y\underline{-3})$　　$\begin{cases}\text{たして　9}\\\text{かけて　-36}\end{cases}$ となる2数は <u>12 と -3</u>

$=(x-y+12)(x-y-3)$　♡

図 1.6.　因数分解のしかた

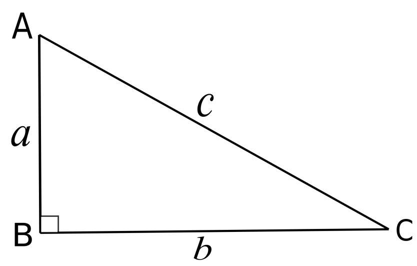
問 1.5.　次の式を因数分解せよ。

(1)　x^2-2x-8　　(2)　$4x^2+y^2-4-4xy$　（$T=2x-y$　とおけ）

(3)　$(x-y+3)(x-y-4)-44$　（$Y=x-y$　とおけ）　(4)　$(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8$

§ 1.6.　三平方の定理（ピタゴラスの定理）

直角三角形 ABC の辺の長さについての重要な結果が三平方の定理である。



定理 1.1.【三平方の定理】　右図のような直角三角形 ABC で，辺 AB の長さが a，BC の長さが b，AC の長さが c のとき，次の関係式がなりたつ：

$$a^2+b^2=c^2$$

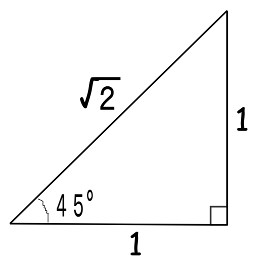
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

定理を証明する前に，一辺の長さが 1 の正方形の対角線の長さを求めてみよう。

(例)　対角線の長さを x とすると，三平方の定理より

$1^2+1^2=x^2$,　したがって　$x^2=2$　を得る。

2 乗して 2 となる正の数は，$\sqrt{2}$.（答え；2 の正の平方根）　この例から，正方形の対角線の長さは，辺の長さの $\sqrt{2}$ 倍であることがわかる。



［注意］$\sqrt{2}=1.414213562\cdots$　は無理数で循環しない無限小数です。例えば，最初の 8 けた部分を 2 乗してみると　$(1.4142135)^2=1.999999824$　である。

［三平方の定理の証明］

証明）一辺の長さが $a+b$ の正方形の内部を，△ABCと合同な三角形
3つと，一辺がcの正方形でうめる。

この正方形の面積について，次の式がなりたつ。

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\times\frac{1}{2}ab$$

$$a^2+2ab+b^2 = c^2+2ab$$

$$\therefore \quad a^2+b^2=c^2$$

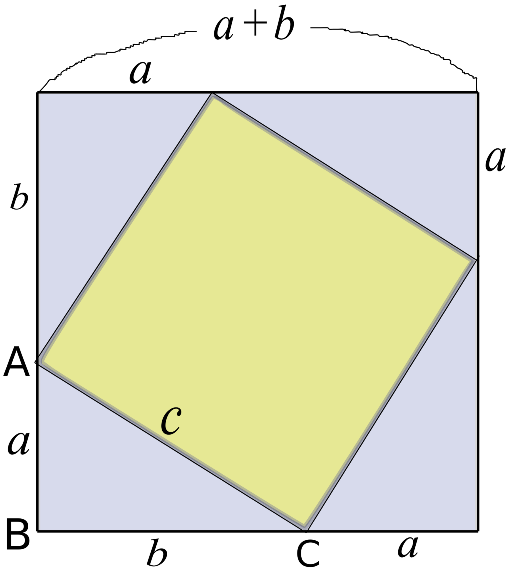


図 1.7. ピタゴラスの定理の証明

例題 1.9. 一辺の長さが２の正三角形ABCの面積を求めよ。

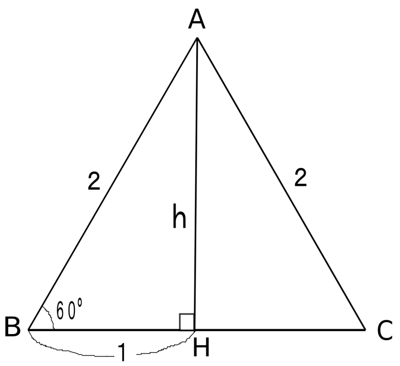
解答）点Aから辺BCに下した垂線をAHとする。
三角形ABHにおいて，AH＝h とおくと，
三平方の定理より

$$h^2+1^2=2^2, \quad h^2=3$$

$$\therefore \quad h=\sqrt{3}$$

高さが $\sqrt{3}$ なので，面積Sは

$$S=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}.$$



（注意）3辺の比が　$1:1:\sqrt{2}$（p.11の例）と　$1:2:\sqrt{3}$（この例）の直角三角形は
よく現れるので，忘れないように！！　♡

ここで，平方根についてきちんと学んでおこう。

♠ 2乗（平方）すると a になる数を，a の平方根という。a の平方根は2つあり，それらを $\sqrt{a}, -\sqrt{a}$ とかく。2乗した数が a だから，a は $a\geqq 0$ である。根号 $\sqrt{\ }$ はルートと読む。♠

(例)・ルートが取れてしまう数；

$\sqrt{0}=0,\quad \sqrt{1}=1,\quad \sqrt{4}=2,\quad \sqrt{9}=3,\quad \sqrt{16}=4,$

$\sqrt{25}=5,\quad \sqrt{36}=6,\quad \cdots\quad, \sqrt{n^2}=n$（$n$ は自然数），$\cdots$

・5 の平方根は，$\sqrt{5}$ と $-\sqrt{5}$ である。すなわち，$(\sqrt{5})^2 = 5$, $(-\sqrt{5})^2 = 5$.

$\sqrt{5} = 2.236067977\cdots$ （循環しない無限小数）であるが，最初の 8 けたをとって 2 乗してみると，$(2.2360679)^2 = 4.999999653$ であり，ぴったり 5 にはならない。

・$3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 5\sqrt{3} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ （$\sqrt{2}$ を含む 2 項は同類項，$\sqrt{3}$ を含む 2 項も同類項。同類項どうしはたし算，ひき算ができる）

■［根号についての演算公式など］

1) $0 < a < b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a} < \sqrt{b}$ （大小関係）

（記号 $\Leftrightarrow$ は同値関係を表す。すなわち「A ならば B」と「B ならば A」が両方なりたつとき，A$\Leftrightarrow$B とかく）

2) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ （積の平方根は，平方根の積）

3) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ （割り算の平方根は，平方根の割り算）

4) $\dfrac{p}{\sqrt{q}} = \dfrac{p\sqrt{q}}{q}$ （分母の有理化 (ユウリカ)：分母，分子に $\sqrt{q}$ をかける）

5) $\sqrt{p^2} = (p \text{ の絶対値})$, $\sqrt{p^3} = p\sqrt{p}$ （$\because\ p^3 > 0$ だから p>0） ■

例題 1.10. (1) 3 つの数 $-\sqrt{8},\ -\sqrt{\dfrac{17}{2}},\ -3$ の大小を，不等式で表せ。

(2) $A = (4 - \sqrt{5})(\sqrt{5} + 4)$, $B = \sqrt{24} \times \sqrt{18} \div \sqrt{3}$ を計算して簡単にせよ。

(3) $(\sqrt{7} + 1)(\sqrt{7} + 6) - \dfrac{18}{\sqrt{7}}$ を計算して簡単にせよ。

解答）（1） 3 つの数を 2 乗すると $8,\ \dfrac{17}{2} = 8.5,\ 9$ だから，これらの正の平方根は $\sqrt{8} < \sqrt{\dfrac{17}{2}} < 3$. したがって，答えは $-3 < -\sqrt{\dfrac{17}{2}} < -\sqrt{8}$.

(2) $A = (4 - \sqrt{5})(4 + \sqrt{5}) = 4^2 - (\sqrt{5})^2 = 16 - 5 = 11$.

$$B = \frac{\sqrt{24}\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4}\sqrt{6}\sqrt{3}\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 2 \times 6 = 12.$$

(3) $(\sqrt{7} + 1)(\sqrt{7} + 6) - \dfrac{18}{\sqrt{7}} = 7 + 7\sqrt{7} + 6 - \dfrac{18\sqrt{7}}{7} = 13 + \left(\dfrac{49}{7} - \dfrac{18}{7}\right)\sqrt{7} = 13 + \dfrac{31}{7}\sqrt{7}$. ♡

問 1.6. (1) 次の 3 つの数の大小を不等号を使って表せ。

(a) $5\sqrt{3},\ 8,\ \sqrt{79}$ (b) $\dfrac{1}{3},\ \sqrt{0.3},\ 0.3$

(2) 次の式を計算して簡単にせよ（分母にルートは残さないこと)。

$$A = \frac{\sqrt{45}}{2} \div \frac{\sqrt{10}}{4}, \quad B = \frac{18}{\sqrt{2}} - \sqrt{98}, \quad C = (\sqrt{5} + 4)(\sqrt{5} - 2)$$

$$D = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}), \quad E = 2\sqrt{40} - \frac{8}{\sqrt{10}} - \sqrt{\frac{5}{2}}$$

(3) $x = \sqrt{3} + \sqrt{5}$, $y = \sqrt{3} - \sqrt{5}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(a) $x^2 - xy + y^2$ (b) $x^3y + xy^3$

(4) 直角三角形を用いて，長さ $\sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7}$ の辺を作図せよ。

章末問題１

問１． 次の計算をせよ。

(1) $(5x^2-4x)-(x^2-3x)$　(2) $12\left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{2}\right)$　(3) $-\dfrac{a-7b}{2}+2a-b$

(4) $(-4a)^2\div 8a\div(-2a^3)$　(5) $5(2x-y)-\{x-3(x-y)\}$　(6) $3(x-y)^2-(2x+y)(x-3y)$

問２． 次式を因数分解せよ。

(1) $x^2-4x-32$　(2) $2ax^2-32a$　(3) $x^2+4y^2-4-4xy$

(4) $(a-1)^2-8(a-1)+7$　(5) $25x^2+20x+4$　(6) $(x-1)(x+1)+(3x+1)(x+1)-8$

問３． (1) 次の数を素因数分解せよ。 (a) 112　(b) 324

(2) 縦が 40m，横が 72m の長方形の土地がある。この土地の周囲に等しい間隔で木を植えたい。４すみには必ず木を植えるものとする。木は最低何本必要ですか。

問４． 次の計算をしなさい。分母にルートの記号は残らないようにせよ。

(1) $3\sqrt{5}\times 2\sqrt{10}$　(2) $3\sqrt{5}+2\sqrt{10}-7\sqrt{5}-4\sqrt{10}$　(3) $(2\sqrt{6}+3)^2$

(4) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-6)-2(\sqrt{5}-2)^2$　(5) $\dfrac{21}{\sqrt{7}}-\sqrt{175}$

(6) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{75}+\sqrt{0.45})+\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}\right)^2$

問 5． 次の問に答えよ。

(1) $x=\sqrt{7}+\sqrt{5},\ y=\sqrt{7}-\sqrt{5}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(a) x^2+y^2　(b) $\dfrac{x}{y}-2xy+\dfrac{y}{x}$　(c) x^3y-xy^3

(2) $\sqrt{102-3n}$ が整数となるような，自然数 n を求めよ。

問６． (1) 三角形 ABC において，AB= 6cm, ∠A= 75°, ∠B= 60° のとき（下図，左），AC, BC の長さを求めよ。

(2) 中心が O の半円があり，線分 CD は点 P で円に接している。線分 AC, BD もこの半円の接線であり AC // BD である（下図，まん中）。AC=9cm, BD=16cm のとき，線分 AB と線分 OC の長さを求めよ。

(3) 直方体 ABCDEFGH があり，AB=4cm, BC=5cm, AE=3cm である（下図，右）。点 M は HE の中点である。線分 AG と線分 CM の長さを求めよ。

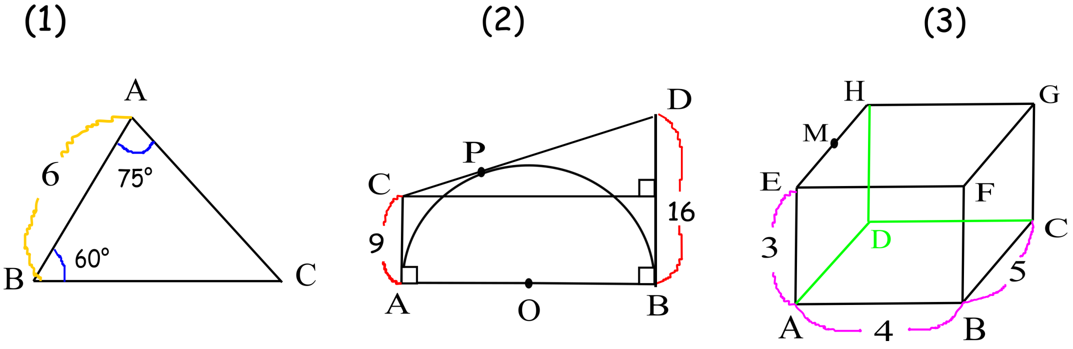


図1.8　問6

第２章　関数とグラフ

§2.1　座標平面と１次関数のグラフ

♠ 右図のように，座標の入った横軸（x 軸）と縦軸（y 軸）が垂直に交わってつくる平面を座標平面と呼ぶ。
x 軸と y 軸はまとめて，座標軸という。
x 軸と y 軸の交点を原点といい,Ｏで表す。座標軸で4つに分けられた平面のうち，原点の右上にあるものを第1象限，左上にあるものを第2象限，左下を第3象限，右下を第4象限という。

図の中の赤点で示した点Ｐの座標は（-4, 6）である。座標が（6, 0) の点は x 軸上の点で，（0, -15）の点は y 軸上の点である。平面上の任意の点Aには，1つの座標（p, q）が定まる。pは x 座標，qは y 座標の値である。この点を A(p, q）と表す。 ♠

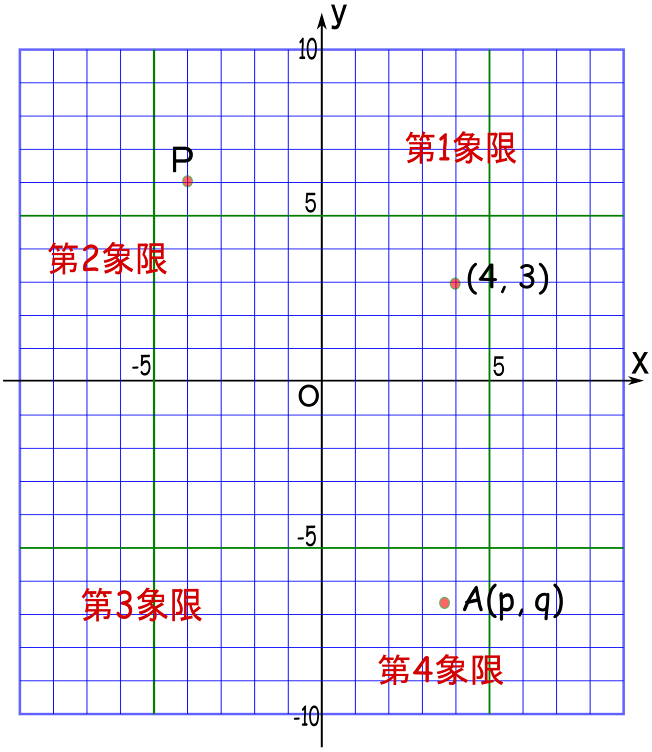


図2.1　座標平面

■ 座標平面上の原点Ｏと，点 P(a, b) を結ぶ線分 OP の長さ（距離 OP という）は，三平方の定理（ピタゴラスの定理）より，

$$\mathrm{OP}= \sqrt{a^2+b^2} \qquad \cdots ①$$

となることがわかる。また，２点 A(x_0, y_0), B(x_1, y_1) 間の距離 AB は，

$$\mathrm{AB}= \sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2} \qquad \cdots ②$$

である。

(例) 原点から点 A$(5,-6)$ までの距離は　$\mathrm{OA}= \sqrt{5^2+(-6)^2} = \sqrt{61}.$

２点 P(3, 4), Q(-8, 6) 間の距離は　$\mathrm{PQ}= \sqrt{\{3-(-8)\}^2+(4-6)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$ ■

♠★ ２つの変数 x, y があって，x の値を決めると，それにともなって y の値がただ１つにきまるとき，y は x の関数（かんすう）であるという。
［注意１］変数とは，いろいろな値をとることのできる文字のこと。定数とは，決まった数や決まった数を表す文字のことである。
［注意２］y が x の関数であることを，$y = f(x)$ とかく。”y は x の関数 (function) である”を記号化した式である。$x = a$ のときの関数の値は $f(a)$（x に a を代入した値）である。
★a, b, c ($a \neq 0$) は定数とする。x の１次式で表される関数　$y = ax + b$　を x の１次関数という。x の２次式である関数　$y = ax^2 + bx + c$　は，x の２次関数と呼ばれる。

また，分数で表された関数 $y = \dfrac{a}{x}$ は，反比例の関数と呼ばれている。この関数は $x = 0$ では値は存在しない。即ち，$x = 0$ では y の値は定義されない（分母が０の数はないということ）。♠

例題 2.1. (1) 次の 1 次関数がとりうる値をしらべ，座標平面上にグラフで示せ。

(a) $y = x$　　(b) $y = \dfrac{1}{2}x - 2$　　(c) $y = -2x + 4$

(2) 次の関数がとりうる値をしらべ，座標平面上にグラフで示せ。

(a) $y = x^2$　　(b) $y = -\dfrac{1}{2}x^2$　　(c) $y = \dfrac{2}{x}$

解答）(1) (a) $y = x$ だから，x 座標と y 座標が等しい点，$(-5,-5), (0,0)$，$(3,3)$，(p,p) などはすべてこの関数をみたす点である。これら無限個の点をプロットしたものが関数のグラフである。図 2.2 (a) が示すような原点を通る直線になる。
(b), (c) 関数のみたす点の表を作って，それらの点を結んでいくと，グラフのがいけいが描ける。２つとも，図 2.2. (b),(c) が示すような直線に近いグラフになる。

(b)

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…	-4	-7/2	-3	-5/2	-2	-3/2	-1	-1/2	0	…

(c)

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	10	8	6	4	2	0	-2	…

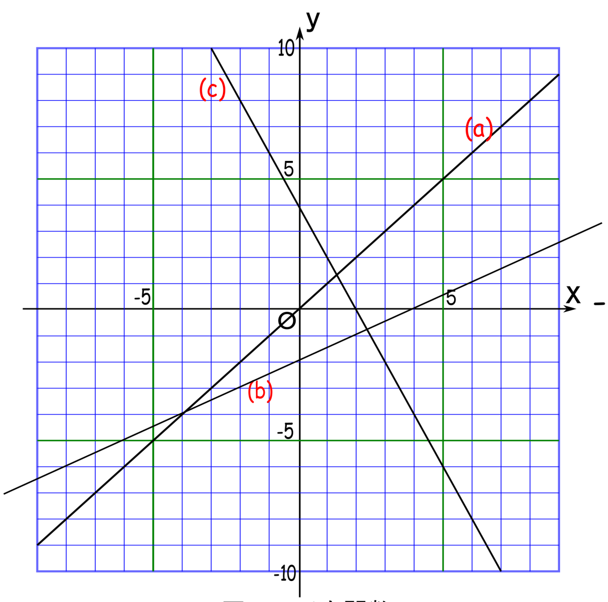


図2.2. 1次関数

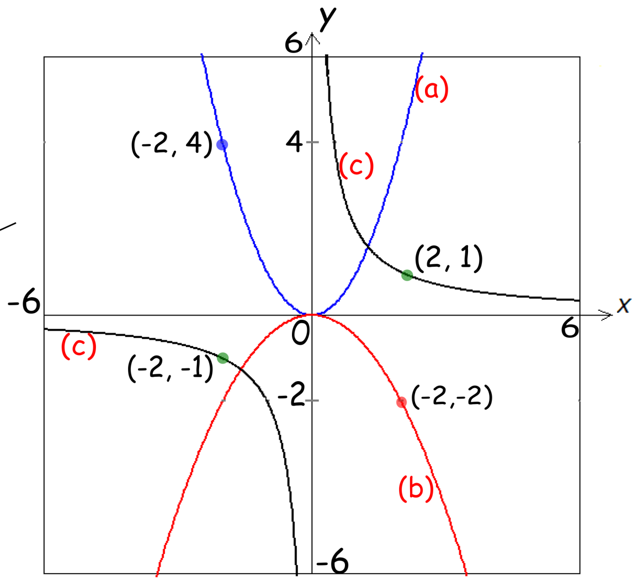


図2.3

(2) 関数のとりうる値の表をつくり，これらの点をなめらかにつなげればグラフになる：

(a)

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	16	9	4	1	0	1	4	9	16	$\cdots$

(b)

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	-8	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$	-8	$\cdots$

(c)

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	-4	-8	$\times$	8	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$

(a),(b) はともに，y 軸を中心にして，左右対称な図形あることがわかるよね（図 2.3 参照）。この曲線は，原点を頂点とした放物線（ほうぶつせん）と呼ばれています。(a) のグラフは，y 軸の上側にあり，上に開いた形（下に凸 (とつ) ）であり，(b) のグラフは，y 軸の下側にあり，下に開いた形（上に凸）である。(a),(b) のグラフに対して y 軸は放物線の軸と呼ばれます。

(c) この関数は $xy = 2$ と表すことができ，$x(>0)$ が大きくなればそれに対応して y は小さくなる。$x < 0$ のときも，x の絶対値が大きくなればそれに対応して $y(<0)$ の値は 0 に近づく。すなわち，反比例の関係にある。$x = 0$ では値が存在しないので，グラフは不連続となる。この形のグラフは，双曲線（そうきょくせん）と呼ばれていて，原点について対称な曲線である。 ♡

♠★ 関数 $y = f(x)$ は，$f(-x) = f(x)$ を満たすとき，そのグラフは y 軸対称である。y 軸で折り返すとグラフが重なる。

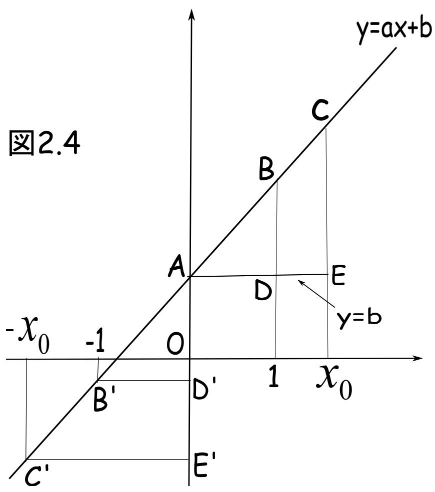
（y 軸対象の例） a, b, c を 0 でない定数として，$y = ax^2 + b$，$y = ax^4 + bx^2 + c$，$y = \dfrac{a}{x^2} + c$.

★ 関数 $y = f(x)$ は，$f(-x) = -f(x)$ を満たすとき，そのグラフは原点について対称（原点対称という）である。原点を中心にして 180 度左回りに回転させるとグラフが重なる。

（原点対象の例） a, b を 0 でない定数として，$y = ax^3 + bx$，$y = ax$，$y = \dfrac{a}{x}$. ♠

さて，図 2.2 で示された 1 次関数のグラフは，すべて直線のように見えるがほんとうに直線でしょうか？ 直線というのは，2 点間を結ぶ最短距離の線のことです。曲がっていないまっすぐな線ということだよね。次のことを証明しましょう。

定理 2.1. 1 次関数 $y = ax + b$ の表すグラフは直線である。



証明）(1) $a = 0$ のとき $y = b$ なので，すべての x に対して，点 $(x,\ b)$ がこの方程式をみたす。このような点の集合は右図に示す線分 AE を左右に延長した直線である。

(2) $a > 0$ のとき，関数をみたす 3 点を

$\mathrm{A}(0,\ b), \mathrm{B}(1,\ a+b), \mathrm{C}(x_0,\ ax_0+b)$ とする。

x_0 は 0, 1 以外の正の任意の点とする。

直角三角形 ADB と AEC を考えると，

$$\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{AD}} = a, \quad \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{AE}} = \frac{ax_0 + b - b}{x_0} = a$$

なので（a は直線の傾きと呼ばれている），

$\triangle\mathrm{ADB} \backsim \triangle\mathrm{AEC}$. よって，点 C は線分 AB，

または AB を延長した直線上にある。

$x < 0$ の部分に対しては，B'$(-1,\ -a+b)$，

C'$(-x_0, -ax_0 + b)$ に対して，△AB'D' と △AC'E' が相似になるので（線分 B'D',C'E' は共に x 軸と平行），上の場合と同様に，C' は傾き a の直線上にあることが分かる。

(3) $a < 0$ のとき，$y = ax + b$ のグラフは第 2 象限から第 4 象限にむかって減少するグラフなので，図 2.4 のグラフを y 軸に関して対称に移動した図で，同じように証明できる。 □

［1 次関数の性質］

■★ 関数 $y = ax$ $(a \neq 0)$ は，x と y の比例関係を表す式である。なぜならば，原点以外のこの式を満たすどんな (x, y) を選んでも，$x : y = 1 : a$ だからである。直線の傾きを表すこの a は，比例定数と呼ばれる。

（例） $y = 3x$ 上にある 2 点 $(2,\ 6)$，$(-4, -12)$ に対して，$2 : 6 = -4 : -12 = 1 : 3$ である。

★ 関数 $y = ax + b$ のグラフは y 軸上の点 $(0,\ b)$ を通る。この b は切片（せっぺん）と呼ばれる。すなわち，$y = ax + b$ のグラフは，y 軸上の切片 b を通り，傾き a の直線である。

$a > 0$ のとき， x が増えると y も増える（x が 1 進んだとき，y の値は a 増える），
グラフは右上がり。

$a<0$ のとき，　x が増えると y は減少する（x が 1 進んだとき，y の値は $-a$ 減る），
グラフは右下がり。

(例) $y=\frac{2}{3}x+4$ のグラフは，右上がりで，x が 1 進んだとき，y の値は $\frac{2}{3}$ 増える。もちろん，x が 3 進んだとき，y の値は 2 増える，と言ってもいいよ（こっちのほうがわかりやすいね）。

★2 点 $\mathrm{P}(a,\ b), \mathrm{Q}(c,\ d)$ を結ぶ線分 PQ の中点 M の座標は

$$\mathrm{M}\left(\frac{a+c}{2},\ \frac{b+d}{2}\right) \quad \cdots \quad ③$$

である。なぜならば，

$$\mathrm{MP}=\sqrt{\left(\frac{a+c}{2}-a\right)^2+\left(\frac{b+d}{2}-b\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2+\left(\frac{d-b}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}}{2}=\frac{1}{2}\mathrm{PQ},$$

$$\mathrm{MQ}=\sqrt{\left(\frac{a+c}{2}-c\right)^2+\left(\frac{b+d}{2}-d\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+\left(\frac{b-d}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}}{2}=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}$$

となるからである。中点の座標が ③のようになるのは，直感的にわかる。例えば，2 と 8 のまん中は 5，-6 と -2 のまん中は -4。すなわち，たして 2 で割った値である。

★2 つの関数　$y=ax+b,\ \ y=cx+d$　のグラフは，
$a=c$ のとき，平行（決して交わらない）である。また，$a\neq c$ のとき，ただ 1 点で交わる。

(例) 3 つの関数を　$y=-3x-4\ \cdots$ ④, $y=-3x+5\ \cdots$ ⑤, $y=x+4\ \cdots$ ⑥　とおくと，
④ と ⑤ のグラフは平行である。④のグラフは，上へ（y 軸の正の方向へ）9 平行移動すると，
⑤ のグラフと重なる。④ のグラフと⑥ のグラフは 1 点 $(-2,\ 2)$ で交わる。なぜならば，
④ と ⑥ の y の値が等しくなるのは，　$-3x-4=x+4$ のときで，$-4x=8,\quad \therefore x=-2,$
このとき，y の値は 2 である。 ■

例題 2.2. 2 つの 1 次関数

$$y=2x+6 \qquad \cdots \quad ①,$$
$$y=ax+2 \quad (a<0) \quad \cdots \quad ②$$

の表すグラフの交点を A，①のグラフと x 軸との交点を B，②のグラフと x 軸との交点を C とする。

(1) 2 点 A，C の座標を a を用いて表せ。

(2) △ABC が AB=AC の 2 等辺三角形になるときの a の値を求めよ。また，このときの点 A, C の座標を求めよ。

(3) △ABC の面積が 9 のとき，a の値を求めよ。
また，このときの点 A, C の座標を求めよ。

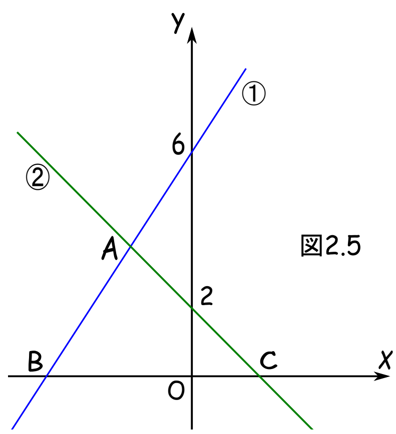


図2.5

解答）(1) C の x 座標は $ax+2=0$ より，$x=-\frac{2}{a}$.

交点 A の x 座標は，　$2x+6=ax+2$　より，

$$(2-a)x=-4, \quad \therefore \quad x=\frac{4}{a-2}. \quad (a-2)\neq 0 \text{ に注意せよ。}$$

このとき，　$y=2\times\frac{4}{a-2}+6=\ \cdots\ =\frac{2(3a-2)}{a-2}.$

以上より，答えは　$\mathrm{A}\left(\frac{4}{a-2},\ \frac{2(3a-2)}{a-2}\right),\quad \mathrm{C}\left(-\frac{2}{a},\ 0\right).$

(2) 図 2.5 から，AB=AC となるのは ②のグラフの傾きが $a=-2$ となるときである。
このとき，C(1, 0)，A(−1, 4) である。

(3) B(−3, 0) なので，BC$=-\dfrac{2}{a}-(-3)=\dfrac{3a-2}{a}$. △ABC の高さは $h=\dfrac{2(3a-2)}{a-2}$.

したがって，面積は $S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3a-2}{a}\times\dfrac{2(3a-2)}{a-2}=\dfrac{(3a-2)^2}{a(a-2)}$. この値が 9 だから，

$$(3a-2)^2=9a(a-2),\quad 9a^2-12a+4=9a^2-18a,\quad 6a=-4,\quad \therefore\ a=-\frac{2}{3}.$$

このとき，$\mathrm{A}\left(-\dfrac{3}{2},\ 3\right)$，C(3, 0). ♡

問 2.1. 3 つの 1 次関数

$$y=\frac{5}{4}x-\frac{3}{4}\ \cdots ①,\quad y=-\frac{1}{3}x+4\ \cdots ②,\quad y=-\frac{7}{2}x-\frac{11}{2}\ \cdots ③$$

のグラフについて，各 2 つのグラフの交点をそれぞれ A, B, C とする。ただし，A は第 1 象限の点，B, C はそれぞれ第 2 象限，第 3 象限の点とする。
(1) 3 つの 1 次関数のグラフをかき，交点 A,B,C の座標を求めよ。
(2) △ABC の面積を求めよ。

問 2.2. (1) グラフが点 (−5, 3) を通り，直線 $y=2x+1$ に平行な 1 次関数を求めよ。
(2) y は x の 1 次関数で，そのグラフが 2 点 (3, 2), (−2, 7) を通る。この 1 次関数を求めよ。
(3) 3 点 (−6, −2), (3, 4), $(a, -5)$ が一直線上にあるとき，a の値を求めよ。

§ 2.2 2 次関数のグラフ，2 次関数の応用

♠★ ・2 次関数 $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ では，x の値が 2 倍，3 倍，…，n 倍になると，y の値は，4 倍，9 倍，…，n^2 倍になる。
・2 次関数 $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ は，$x^2:y=1:a$ または $\dfrac{y}{x^2}=a$ とかけるので，y は x^2 に比例するといってよい。a は比例定数である。

（例） $y=2x^2$ のとき，$2^2:8=(-4)^2:32=1:2$ である。

★ 関数 $y=f(x)$ において，x が a から b まで増加したとき（x の変域が $a\leqq x\leqq b$ のとき），y の最小値が p，最大値が q ならば，y の変域は $p\leqq y\leqq q$ であるという。

(例)・1 次関数 $y=-3x+3$ において，x が −2 から 5 まで増加したとき，y の変域は $-12\leqq y\leqq 9$.
・2 次関数 $y=3x^2$ において，x が −1 から 4 まで増加したとき，y の変域は $0\leqq y\leqq 48$.

★ 関数 $y=f(x)$ において，関数の変化の割合とは，

$$（変化の割合）=\frac{(y\text{ の増加量})}{(x\text{ の増加量})}\quad\cdots ①$$

である。これをもっと具体的にかけば，x の変域が $a\leqq x\leqq b$ のとき，

$$（変化の割合）=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad\cdots ②$$

である。これは，高校で習う関数の平均変化率のことである。中学校の教科書で定義されている ① 式はすごくあいまいなので，注意を要する。

(例)・関数 $y=2x-3$ について，x が −2 から 5 まで増加するとき，y の変化の割合は

$$\frac{2\times 5-3-\{2\times(-2)-3\}}{5-(-2)}=\frac{14}{7}=2$$

である。直線の場合，変化の割合は傾きに等しい。

・2 次関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に対して，x の変域が $-1\leqq x\leqq 2$ のとき，y の変化の割合は

$$\frac{\frac{1}{2}\times 2^2-\frac{1}{2}\times(-1)^2}{2-(-1)}=\frac{2-\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{2}$$

また，x の変域が $1\leqq x\leqq 4$ のとき，y の変化の割合は

$$\frac{\frac{1}{2}\times 4^2-\frac{1}{2}\times 1^2}{4-1}=\frac{8-\frac{1}{2}}{3}=\frac{5}{2}$$

である。2 次関数 $y=ax^2$ $(a>0)$ の場合，x の変域が同じ長さで右にずれていくと，変化の割合は大きくなっていく。 ♠

例題 2.3. 図 2.6 のように，放物線 $y=x^2$ $\cdots$ ③ と直線 $y=-2x+3$ $\cdots$ ④ を表す関数のグラフの交点を A, B とする。

(1) 2 点 A, B の座標を求めよ。 (2) △AOB の面積を求めよ。

(3) △AOB の面積を 2 等分する直線で原点を通るものを求めよ。

解答） (1) ③ と ④ の y の値が等しくなるのは $x^2=-2x+3$ のとき，

$x^2+2x-3=0 \quad\to\quad (x+3)(x-1)=0 \quad\to\quad \therefore\ x=-3,\ 1$

$x=-3$ のとき，$y=9$. $x=1$ のとき，$y=1$. 答えは，A$(-3,\ 9)$, B$(1,\ 1)$.

(2) 直線④ と y 軸との交点を C$(0,3)$ とする。△AOB の面積 S は，△COB と △AOC の面積の和である。2 つの三角形の底辺を OC，高さを A, B の x 座標の絶対値とすれば，

$$S=\frac{1}{2}\times 3\times 1+\frac{1}{2}\times 3\times 3=6.$$

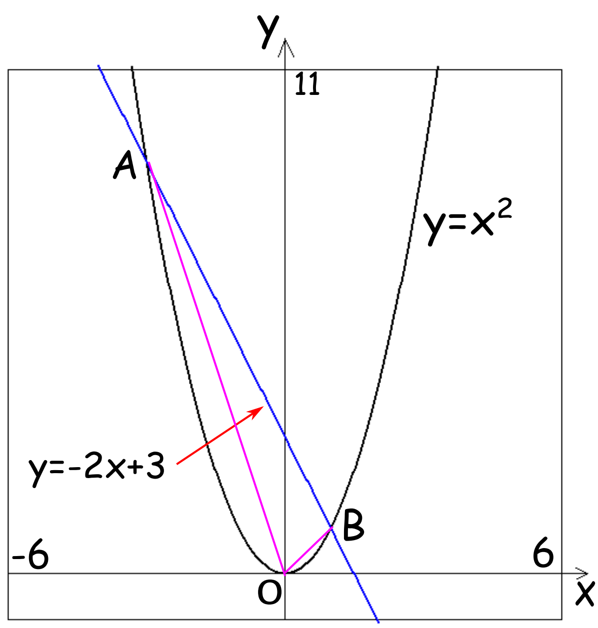


図2.6 放物線と直線

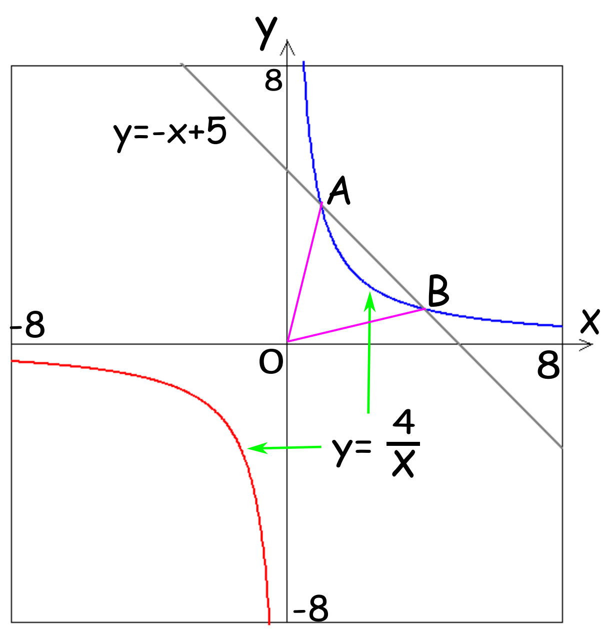


図2.7 双曲線と直線

(3) 原点を通る直線で △AOB の面積を 2 等分する直線は，線分 AB の中点 M を通る。なぜならば，△AOM と △MOB は，底辺がそれぞれAM，MB であり，高さは同じ（原点から線分 AB の延長上へ下した垂線の長さ）だからである。点 M の座標は，$(-1,\ 5)$ なので，原点と点 M を通る直線は，$y=-5x$ である。 ♡

例題 2.4. 双曲線 $y=\dfrac{4}{x}$ $\cdots$ ⑤ と 直線 $y=-x+5$ $\cdots$ ⑥ を表す関数のグラフの交点を A, B とおく。(図 2.7 参照)

(1) 双曲線⑤ の x が，-4 から -0.5 まで増えるとき，y の変域を求めよ。
(2) 双曲線⑤ の x が，0.01 から 1 まで増えるとき，y の変化の割合を求めよ。
(3) 2 点 A,B の座標をもとめ，△AOB の面積を求めよ。

解答）(1) $x=-4$ のとき，$y=\dfrac{4}{-4}=-1$， $x=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$y=-8$. よって，y の変域は $-8\leqq y\leqq -1$.

(2) y の変化の割合は， $\dfrac{4-400}{1-0.01}=\dfrac{-396}{0.99}=-400$. 減少する関数の変化の割合は負になることに注意せよ。

(3) $\dfrac{4}{x}=-x+5$ より，$x^2-5x+4=0 \quad\to\quad (x-1)(x-4)=0 \quad\therefore\quad x=1,\ 4.$

y の値は，$x=1$ のとき，4，$x=4$ のとき，1 なので， $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}(4,\ 1)$.

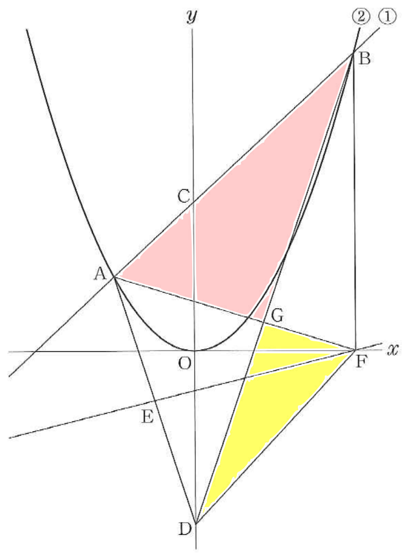
△AOB は OA=OB の二等辺三角形なので，AB を底辺と考える。このとき，高さは線分 AB の中点を M としたとき，OM である。M の座標は $\mathrm{M}\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$， $\mathrm{OM}=\sqrt{\dfrac{25}{4}+\dfrac{25}{4}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$,

$\mathrm{AB}=\sqrt{(1-4)^2+(4-1)^2}=3\sqrt{2}$. 三角形の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\dfrac{5\sqrt{2}}{2}=\dfrac{15}{2}$. ♡

問 2.3. 右図において，直線①は関数 $y=x+6$ のグラフであり，曲線②は関数 $y=ax^2$ のグラフである。2 点 A,B はともに直線①と曲線②との交点で，点 A の x 座標は -3，点 B の x 座標は 6 であり，点 C は直線①と y 軸との交点である。

また，原点を O とするとき，点 D は y 軸上の点で，CO:OD=6 : 7 であり，その y 座標は負である。点 E は線分 AD 上の点で，AE=ED である。

さらに，点 F は x 軸上の点で，線分 BF は y 軸に平行である。（平成 30 年，神奈川県）



(1) 曲線②の a の値を求めよ。
(2) 直線 EF の式を $y=mx+n$ とするとき，m, n の値を求めよ。
(3) 線分 AF と線分 BD との交点を G とするとき，△AGB と，△DFG の面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

問 2.4. 関数 $y=ax^2$ のグラフ上に，x 座標がそれぞれ 2, 6 となる 2 点 A,B をとる。直線 AB の傾きが 4 のとき，a の値を求めよ。（宮城県）

章末問題２

問１． 次の各問に答えよ。

(1)　直線 $y=-2x+4$ を y 軸の負の方向に 6 だけ平行移動したときの，直線の方程式を求めよ。

(2)　2 点 A$(-2,\,-2)$，B$(4,\,13)$ を通る直線の方程式を求めよ。また，この直線と x 軸，y 軸で囲まれる三角形の面積を求めよ。

(3) 直線を表す式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\ \cdots$ ① において，a,b は正の整数で $a>b$ とする。この直線と x 軸および y 軸との交点をそれぞ A, B とする（下図 2.8,(3), 参照)。以下の問に答えよ。

(i) 点 A, B の座標を a,b を用いて表せ。

(ii) △OAB の面積が 10 になるような整数 a,b のうち，それらの差がもっとも小さくなるようなものを求めよ。

(4) 座標平面上に 3 点 A$(5,4)$, B$(0,2)$, C$(3,0)$ がある (下図 2.8,(4) 参照）以下の問に答えよ。

(i) 2 点 B, C を通る直線の式を求めよ。

(ii) △ABC の面積を求めよ。また，点 C を通り △ABC の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

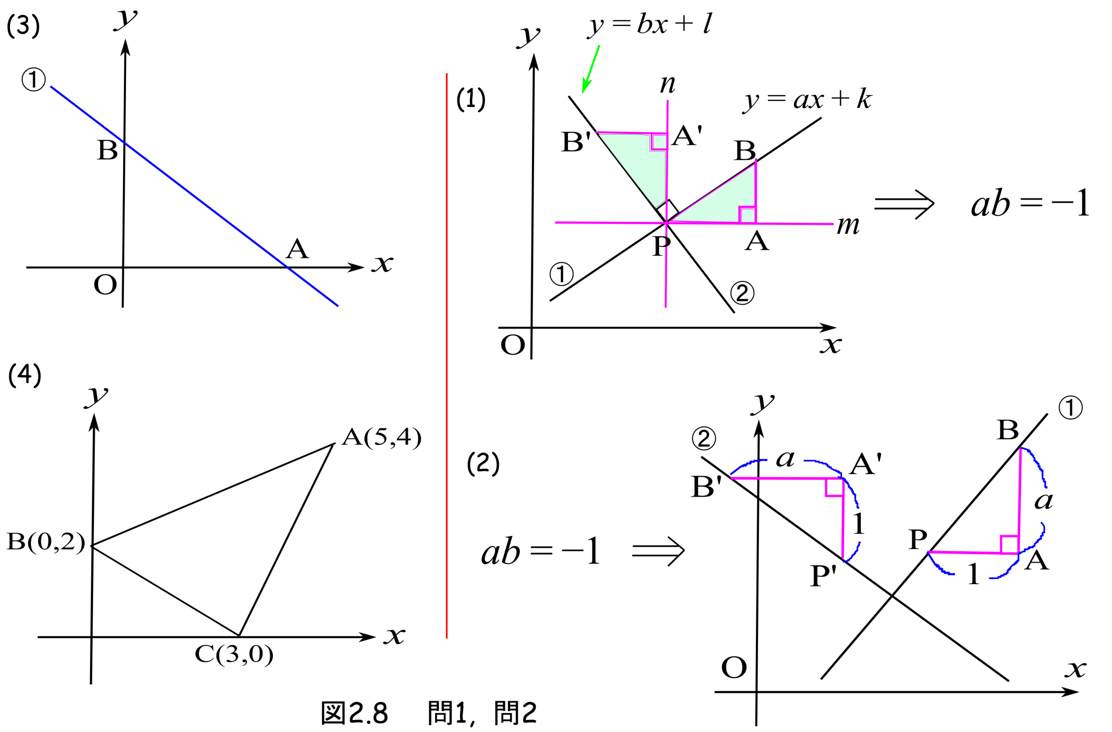


図2.8　問1，問2

問２． 2 つの 1 次関数　$y=ax+k\quad\cdots$ ①，$y=bx+l\quad\cdots$ ② がある。ただし，a,b,k,l は定数で $a>0$ とする。図 2.8 の右図 (1), (2) を利用して，以下の問に答えよ。

(1) ① と ② のグラフが点 P で垂直に交わっているとき，$ab=-1$ であることを説明しなさい。

(2) 式 ①, ② において，$ab=-1$ がなりたつとき，直線 ①と ② のグラフは垂直に交わることを説明しなさい。

［注意］ 上の命題 (1) とその逆 (2) が同時に成り立つので 「$ab=-1$」 と 「① と ② のグラフが垂直に交わる（直交する）」は同値である。すなわち，$ab=-1$ は① と ② のグラフが垂直に交わるための必要十分条件である。（これは高校の範囲かな。テキスト 2，P.27 も参照のこと）

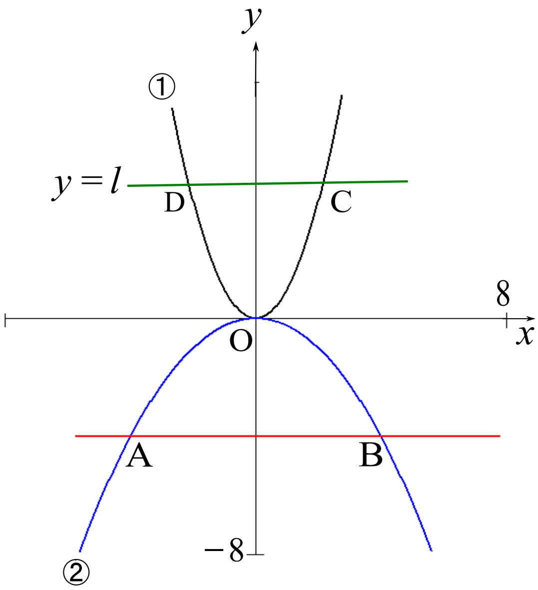
（章末問題 2 は続く）

問３． ２つの２次関数　$y = x^2$　$\cdots$　①，$y = ax^2$　$\cdots$　②　があり，② のグラフ上の点 A の座標は $(-4, -4)$　である。点 B は y 軸に関して A と対称な点である。また，直線 $y = l$　(l は正の定数）と ① のグラフの交点を C, D とする（下図，左参照)。以下の問に答えよ。

(1) 関数②の a の値と点 B の座標を求めよ。

(2) $l = 2$　のとき，四角形 ABCD の面積を求めよ。

(3) 四角形 ABCD の面積が 160 になるときの l の値を求めよ。またこのとき，2 点 A, C を通る直線の式を求めよ。



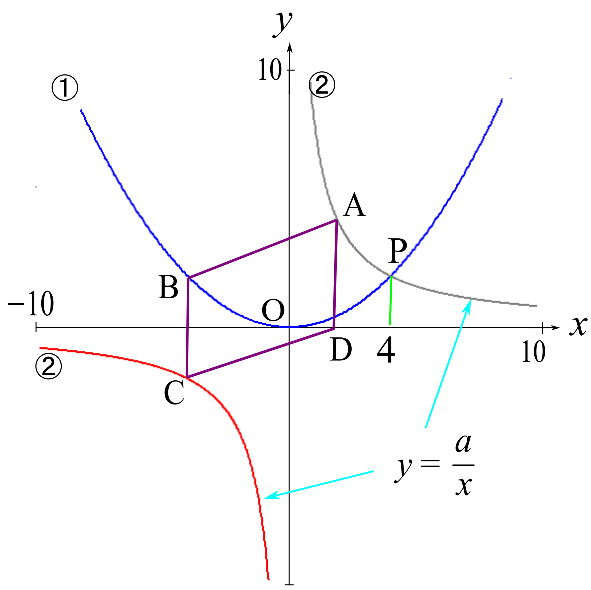


図2.9　問3，問4

問４． ２つの関数　$y = \dfrac{1}{8}x^2$　$\cdots$　①，$y = \dfrac{a}{x}$　$\cdots$　②　があり，① と ② のグラフの交点 P の x 座標は 4 である。点 B は y 軸に関して点 P と対称な点，点 C は関数② 上の点で，直線 BC は y 軸と平行である。点 A は第 1 象限における関数② 上の点で，点 D は x 軸上の点で，直線 AD は y 軸と平行である（図 2.9，右図参照)。以下の問に答えよ。

(1) 関数 ② の a の値を求めよ。また，2 点 B，C の座標を求めよ。

(2) 四辺形 ABCD が平行四辺形になるとき，点 A の座標を求めよ。

(3) (2) の平行四辺形で，長い方の対角線の長さは短い方の対角線の長さの何倍か求めよ。

問５． x の値が　a から　$a + 3$ まで変化するとき，関数　$y = -2x^2$　と関数　$y = -8x + 2$　の変化の割合は等しくなる。このとき，a の値を求めよ。

第３章　方程式とその解

§ 3.1　１次方程式，連立方程式

♠★ 方程式とは，変数（文字）に特別な値を代入すると成り立つ等式のことである。方程式を成り立たせる変数の値を方程式の解という。解を求めることを方程式を解くという。

(例)・方程式　$2x-8=0$ の１つの解は，$x=4$ である。
・方程式　$2x-3y=1$　を満たす正の整数解の１つは　$x=5,\ y=3$　である。
・方程式　$x^2+5=0$　を満たす x は，実数では存在しない（解なし）。

★ 等式　$A=B$　に，次のような演算をほどこしても，等式は常に成り立つ。

1)　$A+C=B+C$　　両辺に同じ数を加えてもよい
2)　$A-C=B-C$　　両辺から同じ数を引いてもよい
3)　$A\times C=B\times C$　　両辺に同じ数をかけてもよい
4)　$A\div C=B\div C$　$(C\neq 0)$　　両辺を同じ数でわってもよい
5)　$B=A$　　等式の両辺を入れかえてもよい
6)　$A-B=0$　$(B-A=0)$　　項を移項してよい，移項すると符号が変わる

(例)　$\dfrac{x^2+2x}{4}=2 \ \leftrightarrow\ x^2+2x=8\ \leftrightarrow\ x^2+2x+1=9\ \leftrightarrow\ (x+1)^2=9.$
（これらはすべて同等な式）

★a,b,c,d,e_1,e_2 は定数とする。$ax+b=0$ $(a\neq 0)$ $\cdots$ ① の形の方程式を x の１次方程式という。また，変数が２つ（x と y）で２本の方程式からなる

$$\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases} \quad \cdots ②$$

を連立１次方程式という。

(例)・１次方程式　$2x+8=2$　を解くと，$2x=-6\ \rightarrow\ x=-3$（解）である。

・連立１次方程式 $\begin{cases} 2x+y=7 & \cdots ③ \\ -x+2y=4 & \cdots ④ \end{cases}$　を加減法（１つの変数を消去する方法）で解くと

$$\begin{array}{rr} & 2x+y=7 \\ +) & -2x+4y=8 \\ \hline & 5y=15 \end{array} \quad \Rightarrow \quad y=3,$$

④ に代入して，$-x+6=4$,　$\therefore\ x=2.$
（解または答え）$x=2,\ y=3$

★ 比例式　$x:y=a:b$　は　$ay=bx$　と同等（今後，⇔ なる記号で表す）である。
比例式に未知の変数が含まれているとき，それは方程式である。
（例）　比例式　$(x-1):3=2:5$　を満たす x は，$5(x-1)=6\ \rightarrow\ 5x=11$　となるので，

$x=\dfrac{11}{5}$　である。　♠

例題 3.1. (1) 方程式　$\dfrac{2x+3}{3}=\dfrac{15-x}{4}$　を解け。
(2) 比例式　$(x+2):6=(x-3):8$　を満たす x を求めよ。
(3) ある町の人口は，10 年前は現在よりも３割多かった。20 年前は，10 年前よりも５％多く，現在よりも 1022 人多かった。現在の人口を求めよ。

解答）(1) 両辺に 12 をかけると，$4(2x+3)=3(15-x)\ \rightarrow\ 8x+12=45-3x\ \rightarrow$
$11x=33\quad \therefore\ x=3.$

(2) $8(x+2)=6(x-3) \quad \to \quad 8x+16=6x-18 \quad \to \quad 2x=-34 \quad \therefore \quad x=-17.$

(3) 現在の人口を x とする。10 年前の人口は　$x+0.3\times x=1.3x$. 20 年前の人口は，$1.3x+0.05\times(1.3x)=1.365x$. 20 年前の人口は現在よりも 1022 人多かったので，

$$1.365x=x+1022 \quad \to \quad 0.365x=1022 \quad \to \quad \frac{365}{1000}x=1022 \quad \to \quad \frac{73}{200}x=1022 \quad \to$$

$$x=\frac{1022\times 200}{73}=14\times 200=2800.$$ （答え）2800 人 ♡

♠★ **濃度** 5 %の食塩水 100g といったとき,「100g の液体の中に溶けている食塩の量が 5g」を意味する。一般に，溶液や混合気体などに含まれる組成成分の量の割合（%）を濃度とよぶ。

（例）　濃度 6 %の食塩水 300g には，$0.06\times 300=18$(g) の食塩が溶けている。

★ **道のり**とは，ある地点から他の地点までの道の長さ（距離）のことである。道のりと，速さ（単位時間に進む距離），時間の間には　$(\text{時間})=\dfrac{(\text{道のり})}{(\text{速さ})}$　$\cdots$ ⑤　なる関係が成り立つ。

$(\text{速さ})=\dfrac{(\text{道のり})}{(\text{時間})}$　$\cdots$ ⑥，　$(\text{道のり})=(\text{時間})\times(\text{速さ})$　$\cdots$ ⑦　と変形してもよい。

(例）家から町の水族館まで，時速 4km で歩くと 1 時間半かかった。家から水族館までの道のりは式⑦より，$1.5\times 4=6$ (km)　である。 ♠

例題 3.2. (1) 連立方程式 $\begin{cases} 5x+3y=15 & \cdots\ (\dagger) \\ 3x\ -y=\ 2 & \cdots\ (\ddagger) \end{cases}$ を解け。

(2) 容器 A には 5 %の食塩水 300g が，容器 B には 9 %の食塩水 200g が入っている。 容器 A から xg，容器 B から yg の食塩水をとって混ぜ合わせると，8 %の食塩水が 120g できた。x, y の値を求めよ。

(3) 池の周りに，周囲が 3600m の道路があります。この道路を，A は自転車で B は徒歩で，それぞれ一定の速さでまわります。同じところを同時に出発して，反対の方向にまわると 15 分後にはじめて出会います。また，同じ方向にまわると，A は B に 30 分後にはじめて追いつきます。A，B それぞれの速さは毎分何 m ですか。ただし，A の速度は B の速度の 2 倍以上とする。

解答）(1) 式 $(\ddagger)$ より，$y=3x-2$，　これを式 $(\dagger)$ に代入すると，

$$5x+3(3x-2)=15 \quad \to \quad 14x=21 \quad \therefore \quad x=\frac{3}{2}.$$ このとき，$y=3\times\dfrac{3}{2}-2=\dfrac{5}{2}.$

（答え）$x=\dfrac{3}{2}$, $y=\dfrac{5}{2}$

［注意］この例のように，一つの変数の式を，もう一つの方程式に代入して解く方法を代入法という。

(2) 食塩水の量を考えると　$x+y=120$　$\cdots$ $(\dagger)$.　新しくできた食塩水のなかの食塩の量は $\dfrac{5}{100}x+\dfrac{9}{100}y=120\times\dfrac{8}{100}$　を満たすので，　$5x+9y=960$　$\cdots$ $(\ddagger)$.　$(\ddagger)$，と $5\times(\dagger)$ より，

$$\begin{array}{rr} & 5x+9y=960 \\ -) & 5x+5y=600 \\ \hline & 4y=360 \end{array} \quad \Rightarrow \quad y=90,$$ $(\dagger)$ に代入して，$x+90=120$,　$\therefore$　$x=30.$

（答え）$x=30$, $y=90$（単位は g）

(3) A，B が出発点から反対方向にまわり，A が xm 走って B と出会ったとする（図 3.1 (a) 参照)。

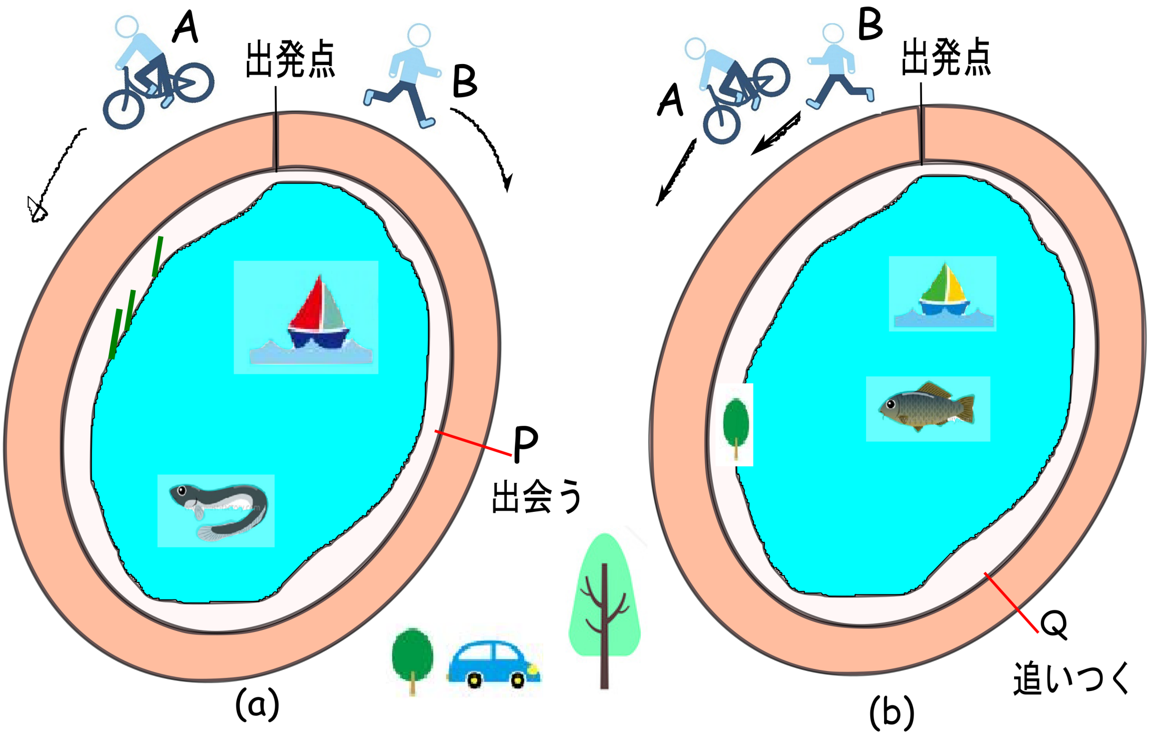


図3.1. 例題3.2 (3)

A の速度を a, B の速度を b とする。15 分後に P 地点で出会ったので，$15 = \dfrac{x}{a}$, $15 = \dfrac{3600 - x}{b}$.

第 1 式から $x = 15a$，これを第 2 式に代入すると，$15 = \dfrac{3600 - 15a}{b} \quad \to \quad 15a + 15b = 3600$

$\therefore \quad a + b = 240 \quad \cdots \quad (\dagger)$

同じ方向にまわったとき，A がBに追いつくのは 2 周目である（B は 1 周目）。A が出発点から ym の所（右図，Q 地点）で追いついたとすると，$30 = \dfrac{y}{b}$, $30 = \dfrac{3600 + y}{a}$ である。

第 1 式から $y = 30b$，これを第 2 式に代入して，$\dfrac{3600 + 30b}{a} = 30 \quad \therefore \quad a - b = 120 \quad \cdots \quad (\ddagger)$

式 $(\dagger)$ と $(\ddagger)$ をたすと，$2a = 360 \quad \therefore \quad a = 180.$ このとき，$b = a - 120 = 60.$

（答え）A の速さ：毎分 180m，B の速さ：毎分 60m. ♡

問 3.1. 次の方程式を解け。

(1) $2 - \dfrac{2}{3}x = \dfrac{1}{2}x - 5$ (2) $x - 2y = 5x + 6y = 8$ (3) $\begin{cases} 0.4x - 0.1y = 1.3 \\ 4x - 1 = -\dfrac{y}{3} \end{cases}$

問 3.2. (1) 2 つの整数がある。その和が 11 で，大きいほうの数を小さいほうの数でわったとき，商が -3 で余りが 1 になる。2 つの整数を求めよ。

(2) 箱に入っているミカンを，何人かの子供で分けることにした。一人 6 個ずつ分けると 8 個足りず，一人 5 個ずつ分けると 5 個余る。ミカンの個数 x(個) と子供の人数 y(人) を求めよ。（平成 31 年，神奈川）

(3) 連立方程式 $\begin{cases} 2x + 3a = 7 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ の解が $x : y = 3 : 4$ となるとき，a の値を求めよ。（白鴎高）

§ 3.2　2 次方程式とその応用

♠★ $a, b, c\ (a > 0)$ を定数とする。 $ax^2 + bx + c = 0$ $\cdots$ ① の形の方程式を 2 次方程式という。式① を満たす x の値を解という。2 次方程式の解の個数は，2 つ，1 つ，または 解なし，のいずれかである。解を求めるための基本は，2 次式の因数分解だよ。

(例)　$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \to \quad (x-3)(x-1) = 0 \quad \therefore \quad x = 3,\ 1$ （解は 2 つ）

$x^2 + 6x + 9 = 0 \quad \to \quad (x+3)^2 = 0 \quad \therefore \quad x = -3$ （解は 1 つ）

$x^2 - 4x + 5 = 0 \quad \to \quad (x-2)^2 + 1 = 0$ 左辺は常に正だから，解なし

★ $Ax^2 - B = 0\ (A > 0,\ B > 0)$ の解は，無理数で表現される。なぜならば，

$$x^2 = \frac{B}{A}, \quad \to \quad x = \pm\sqrt{\frac{B}{A}} \quad \cdots \text{②} \quad （解は 2 つ）$$

(例)　$4x^2 - 20 = 0 \quad \to \quad x^2 = 5 \quad \therefore \quad x = \pm\sqrt{5}.$ ♠

さて，2 次方程式が因数分解できなかったり，式② がすぐ使えないとき，どうしましょうか？式② がやっぱり有効です。

$$\text{①} \quad \to \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \to \quad x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad \to$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

もし，$b^2 - 4ac \geqq 0$ ならば，　$x + \dfrac{b}{2a} = \pm\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$.　したがって，

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \cdots \text{③} \quad （解の公式）}$$

以上より，　$b^2 - 4ac > 0$ のとき，　異なる 2 つの解（式③）をもつ，

$b^2 - 4ac = 0$ のとき，　1 つの解 $x = -\dfrac{b}{2a}$ をもつ，

$b^2 - 4ac < 0$ のとき，　解なし。

（例）2 次方程式　$x^2 - x - 1 = 0$ の解は，解の公式を用いて　$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となる。

［注意］2 次方程式の解を特徴づける式　$D = b^2 - 4ac$ は，判別式と呼ばれているよ（高校で習う)。上の結果から，2 次方程式の解については，すべて分かったのであるが，実際に解を求める際は因数分解が基本です。因数分解が分からないとき，解の公式を使って下さい。2 次方程式の解は，図形で考えると，放物線：$y = ax^2$ と直線： $y = -bx - c$ のグラフの交点の x 座標です。交点がないときもあるよね。それは $D < 0$ のときです。

例題 3.3. (1) 次の 2 次方程式の解を求めよ。

(a) $x^2 - 2x - 6 = 0$　　(b) $x(x+4) = 24 - x$　　(c) $x^2 - \dfrac{5}{3}x - \dfrac{2}{3} = 0$

(d) $4x^2 - 8x - 3 = 0$　　(e) $(x+2)^2 + 2x + 6 = 40 - x$

(2) 2 次方程式　$2x^2 + (a-4)x + a = 0$ の解の 1 つが $-\dfrac{1}{2}$ のとき，a の値ともう 1 つの解を求めよ。

解答） (1) (a) （与式）$\to$ $x^2 - 2x + 1 = 7 \to (x-1)^2 = 7 \to x - 1 = \pm\sqrt{7}.\ \therefore\ x = 1 \pm \sqrt{7}$

(b) （与式）$\to$ $x^2 + 5x - 24 = 0.$ これを因数分解する。たして 5，かけて -24 の 2 数は

-3 と 8，したがって　$(x+8)(x-3)=0$　解は，$x=-8,\ 3.$

(c)（与式）の両辺を 9 倍すると，$9x^2-15x-6=0.$　$Y=3x$ とおくと，$Y^2-5Y-6=0$

$\rightarrow\ (Y-6)(Y+1)=0.\quad \therefore\ Y=-1,\ 6\quad \rightarrow\ x=-\dfrac{1}{3},\ 2.$

(d) $D=64-4\times 4\times(-3)=16(4+3)=16\times 7\quad\rightarrow\ x=\dfrac{8\pm 4\sqrt{7}}{8}=1\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}.$

(e) 与式は　$(x+2)^2+3(x+2)-40=0$　となる。$Y=x+2$ とおくと，

$Y^2+3Y-40=0\quad\rightarrow\ (Y+8)(Y-5)=0\quad\therefore\ Y=-8,\ 5\quad\rightarrow\ x=-10,\ 3.$

(2) 解の 1 つが　$-\dfrac{1}{2}$　だから，与式に代入すると　$2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+(a-4)\left(-\dfrac{1}{2}\right)+a=0$　より，

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}a+2+a=0\quad\rightarrow\ \dfrac{1}{2}a=-\dfrac{5}{2}\quad\therefore\ a=-5.$

与式は，$2x^2-9x-5=0$　なので，2 倍して　$4x^2-18x-10=0,$　$Y=2x$　とおくと，

$Y^2-9Y-10=0,\ (Y-10)(Y+1)=0\ \rightarrow Y=10,-1\quad\therefore\ x=5,-\dfrac{1}{2}.$　答えは，$x=5.$ ♡

例題 3.4. 右図において，直線①は関数 $y=-x$ のグラフであり，曲線②は関数 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ のグラフ，曲線③は関数 $y=ax^2$ のグラフである。

点 A は直線①と曲線②との交点であり，その x 座標は -3 である。点 B は曲線②上の点で，線分 AB は x 軸に平行である。

また，点 C は曲線③上の点で，線分 AC は y 軸に平行であり，点 C の y 座標は -2 である。点 D は線分 AC 上の点で，AD : DC= 2 : 1　である。

さらに，点 E は線分 DB と y 軸との交点である。点 F は y 軸上の点で，AD=EF であり，その y 座標は正である。原点を O として，次の問に答えよ。（平成 31 年神奈川県）

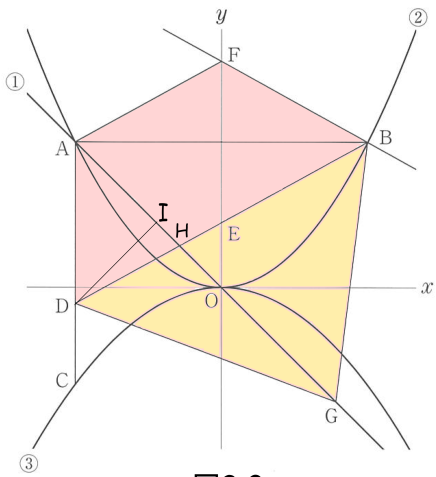


図3.2

(1) 式　$y=ax^2$　の a の値を求めよ。

(2) 直線 BF の式を　$y=mx+n$　とするとき，m,n の値を求めよ。

(3) 点 G は直線①上の点で，その x 座標は正とする。三角形 BDG の面積が四角形 ADBF の面積と等しくなるとき，点 G の x 座標を求めよ。

解答）(1) 点 C の y 座標は -2 なので，$-2=a\times(-3)^2$　より，$a=-\dfrac{2}{9}.$

(2) A の座標は $(-3,3)$. AC=5，AD : DC= 2 : 1 より，AD= $2\times\dfrac{5}{3}=\dfrac{10}{3}.$ D の座標は $\left(-3,-\dfrac{1}{3}\right).$

B$(3,3)$ より，線分 DB の傾きは $\dfrac{10}{3}\div 6=\dfrac{5}{9}.$ E は DB の中点なので，y 座標の値は，$\dfrac{3-\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{4}{3}.$

AD と FE の長さ等しいので，F の y 座標は $\dfrac{4}{3}+\dfrac{10}{3}=\dfrac{14}{3}.$　直線 BF の傾きは $\dfrac{3-\frac{14}{3}}{3}=-\dfrac{5}{9}$

だから，直線 BF の方程式は　$y=-\dfrac{5}{9}x+\dfrac{14}{3}$.　答えは　$m=-\dfrac{5}{9},\ n=\dfrac{14}{3}$.

(3) まず，四角形 ADBF の面積を求めよう。△ADB と △ABF の面積の和である。 2 つの三角形の底辺を AB とすると，高さはそれぞれ $\dfrac{10}{3},\ \dfrac{5}{3}$ なので，四角形 ADBF の面積は

$$\frac{1}{2}\times 6\times\frac{10}{3}+\frac{1}{2}\times 6\times\frac{5}{3}=15.$$

さて，G の座標を $(a,-a)$ として，三角形 BDG の面積 S を求めよう。線分 DB と AG の交点を H，点 I は DI⊥AD となる AD 上の点とする。　$S=$（△HDG の面積）＋（△HGB の面積）なので，右辺の 2 つの三角形の底辺を HG とし，高さをそれぞれ DI, OB とする。DI は，直角二等辺三角形 ADI の一辺なので　AD : DI= $\sqrt{2}:1$　より DI= $\dfrac{10}{3}\div\sqrt{2}=\dfrac{5}{3}\sqrt{2}$.　OB= $3\sqrt{2}$.

H の座標は，直線 DB : $y=\dfrac{5}{9}x+\dfrac{4}{3}$　と直線①の交点だから　$-x=\dfrac{5}{9}x+\dfrac{4}{3}$　より，

$$x=-\frac{6}{7},\quad\therefore\quad \mathrm{H}\left(-\frac{6}{7},\ \frac{6}{7}\right).\quad \mathrm{HG}=\sqrt{\left(a+\frac{6}{7}\right)^2+\left(-a-\frac{6}{7}\right)^2}=\sqrt{2}\left(a+\frac{6}{7}\right).$$

以上より　$S=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\left(a+\dfrac{6}{7}\right)\times\dfrac{5}{3}\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\left(a+\dfrac{6}{7}\right)\times 3\sqrt{2}=\dfrac{14}{3}\left(a+\dfrac{6}{7}\right)$.

最後に　$S=\dfrac{14}{3}\left(a+\dfrac{6}{7}\right)=15$　より，　$a+\dfrac{6}{7}=\dfrac{45}{14}$　$\therefore$　$a=\dfrac{33}{14}$（答え）.　♡

［私見］これは，平成 31 年の神奈川県公立高校の入試問題の 1 つであるが，いい問題じゃないね。やたら直線が多く，無理矢理問題を作っているという感じだね。受験生に計算だけをいっぱいやらせる問題だよ。即ち，問題にストーリーがない，楽しくない，美しくない。こうゆう問題は作らないで欲しいよね。

問 3.3. (1) 次の方程式の解を求めよ。

(a) $x^2+7x=0$　　(b) $x^2+0.2x-0.35=0$　　(c) $x^2-8x+2=0$

(d) $(x+1)^2-4x-4=8$　　(e) $4x^2-12x-91=0$

(2) 2 次方程式　$x^2+x-1=0$　の 2 つの解のうち正のほうを a とする。$\dfrac{2}{a}-\dfrac{2}{a^2}$　の値を求めよ。

［参考］（再び分母の有理化）分母に無理数の入った式　$P=\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$　は，分母と分子に $\sqrt{a}-\sqrt{b}$　をかけると

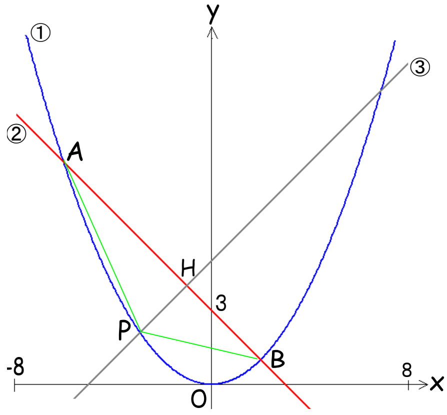
$$P=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

となり，分母は有理数になる。

（例）　$\dfrac{2}{\sqrt{7}-1}=\dfrac{2(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{7}+1)}{7-1}=\dfrac{\sqrt{7}+1}{3}$.

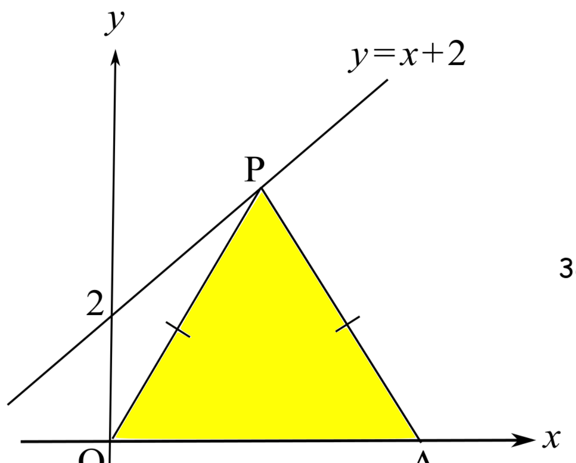
$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{5}}{5-3}=\sqrt{5}.$$

問 3.4. 関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフは右図の①，グラフ②は，関数 $y=-x+3$ のものである。関数 $y=x+a$ のグラフは③，ただし，定数 a は $3<a<9$ を満たす数である。
グラフ①とグラフ②の交点を A，B とする（図 3.3 参照）。グラフ①とグラフ③の交点で x 座標が負のものを P とする。また，グラフ②とグラフ③の交点を H とする。O は原点である。以下の問に答えよ。

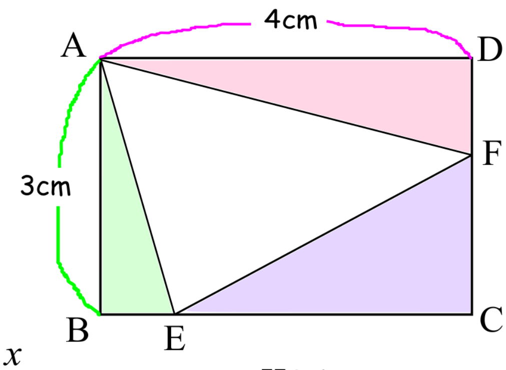


(1) 点 A，B の座標を求め，線分 AB の長さを求めよ。
(2) 点 P の座標を a を用いて表せ。
(3) 点 P の座標が整数値になるときの，a の値を求めよ。このとき，△APB と △AOB の面積はどちらが大きいか，理由を付して答えよ。

問 3.5. 下の左図で，点 P は $y=x+2$ のグラフ上の点で，点 A は PO=PA となる x 軸上の点である。点 P の x 座標を a として，次の問に答えよ。ただし，$a>0$ とし，座標の 1 目盛りは 1cm とする。
(1) 点 A，P の座標を a を用いて表せ。
(2) △POA の面積が 35cm^2 のとき，点 P の座標を求めよ。また，直線 PA の式を求めよ。
(3) △POA が正三角形になるときの a の値を求めよ。



問3.5



問3.6

問 3.6. 上の右図のように，長方形 ABCD の辺 BC,CD 上に 2 点 E,F をとる。三角形の面積比が

$$\triangle\text{ABE} : \triangle\text{ADF} : \triangle\text{ECF} = 1 : 2 : 3$$

のとき，BE の長さを求めよ。

章末問題３

問１. (1) 次の不等式を解け。
(a) $x+2>4x+3$ (b) $2x+6<5x-3$ (c) $25 \geqq 4x-3$ (d) $5(x-3) \leqq 5-x$

(2) 2 つの自然数があり，その差は 5 で，積は 84 である。この 2 つの自然数を求めよ。

(3) 2つの自然数 m, n がある。$m+n$ を m で割ると，商が 4 で余りが 3 になる。また，$10n$ を $m+n$ で割ると，商が 7 で余りが 47 になる。このとき，自然数 m, n の値を求めよ。（中央大附高）

(4) a を定数とする。x の 2 次方程式　$x^2+4x-a^2-12=0$　の 1 つの解が a であるとき，もう 1 つの解を求めよ。　（都立西高）

問２．次の各問に答えよ。

(1) x の係数が $2b$ である 2 次方程式　$ax^2+2bx+c=0$　$\cdots$ ①　の解の公式は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a} \quad \cdots \text{②}$$

となることを示せ。

(2) 上の公式を用いて，次の 2 次方程式を解け。

(a) $x^2-4x+2=0$　　(b) $2x^2+8x-1=0$　　(c) $x^2-3x-\dfrac{1}{4}=0$

問３．8 %の食塩水 100g から ag の食塩水を取り出し，かわりに同じ量の水 ag をいれる。さらに，この薄められた食塩水 100g から ag の食塩水を取り出し，かわりに同じ量の水 ag をいれたところ，濃度は 2 %になった。このとき，a の値を求めなさい。（成城高）

問４．2 つの関数　$y=-\dfrac{8}{x}$　$\cdots$ ①，$y=ax^2$　$\cdots$ ②　のグラフの交点は，点 A$(4,-2)$ であり，点 B は原点に関し点 A と対称な点である。点 P は放物線② 上にあり，動くものとする（図 3.3 参照）。以下の問に答えよ。

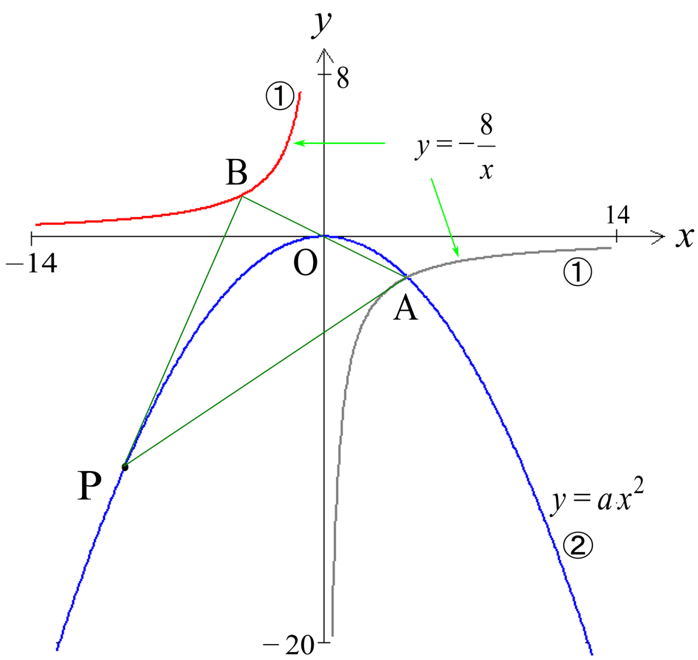


図3.3 章末問題3,問4

(1) a の値を求めよ。また，点 B の座標および線分 AB の長さを求めよ。

(2) △ABP が PA=PB の二等辺三角形になるときの点 P の座標を求めよ。

(3) △ABP が直角三角形になるような点 P の座標をすべて求めよ。

問題の答え

問 1.1 (1), (a) 12 (b) 15 (2) $\frac{5}{2} < e < \frac{68}{25} < 3$ (3) 略（例題 1.1 式①,② 参照せよ）

問 1.2 (1) $3 \cdot 5 \cdot 17,\quad 2 \cdot 3^2 \cdot 61$ (2) 最大公約数 8，最小公倍数 480
問 1.3 (1) 14, 28 (2) $n = 30$ (3) 280 (4) 500^2
問 1.4 (1) $x^2 + 4x - 21$ (2) $-24mn$ (3) $4x^2 - y^2 + 6y - 9$

問 1.5 (1) $(x-4)(x+2)$ (2) $(2x-y-2)(2x-y+2)$ (3) $(x-y-8)(x-y+7)$
(4) $(x-4)(x-2)(x-1)(x+1)$
問 1.6 (1) (a) $8 < 5\sqrt{3} < \sqrt{79}$ (b) $0.3 < \frac{1}{3} < \sqrt{0.3}$
(2) $A = 3\sqrt{2},\quad B = 2\sqrt{2},\quad C = -3 + 2\sqrt{5},\quad D = 2\sqrt{2},\quad E = \frac{27}{10}\sqrt{10}$
(3) (a) 18 (b) -32 (4) 下図参照。

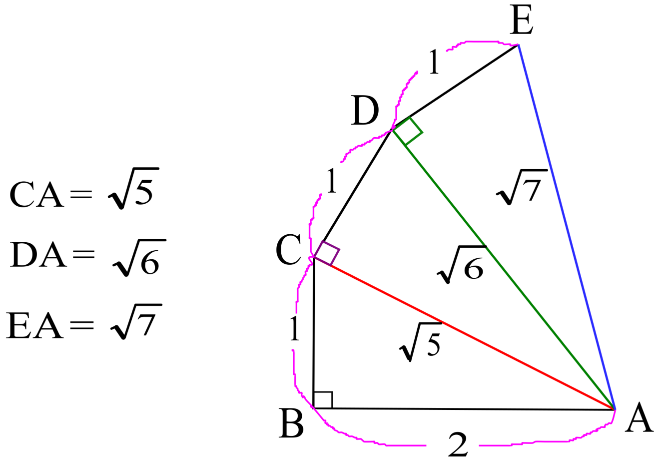


図 問1.6 (4)

章末問題 1

問 1. (1) $4x^2 - x$ (2) $3x - 6y$ (3) $\frac{3}{2}a + \frac{5}{2}b$ (4) $-\frac{1}{a^2}$ (5) $12x - 8y$
(6) $x^2 - xy + 6y^2$

問 2. (1) $(x-8)(x+4)$ (2) $2a(x-4)(x+4)$ (3) $(x-2y-2)(x-2y+2)$ (4) $(a-8)(a-2)$
(5) $(5x+2)^2$ (6) $4(x+2)(x-1)$

問 3. (1) (a) $2^4 \cdot 7$ (b) $2^2 \cdot 3^4$
(2) 40 と 72 の最大公約数は 8，8m 間隔で植えれば良い。木は最低 28 本必要。

問 4. (1) $30\sqrt{2}$ (2) $-4\sqrt{5} - 2\sqrt{10}$ (3) $33 + 12\sqrt{6}$ (4) -1
(5) $-2\sqrt{7}$ (6) $9 - \frac{9}{10}\sqrt{15}$

問 5. (1) (a) 24 (b) 8 (c) $8\sqrt{35}$ (2) 7, 22, 31, 34

問 6. 答えの単位は cm。(1) AC$= 3\sqrt{6}$, BC$= 3 + 3\sqrt{3}$ (2) AB$= 24$, OC$= 15$

(3) △ACG および △CMN (N は AD の中点) で考えよ。AG$= 5\sqrt{2}$, CM$= \frac{5}{2}\sqrt{5}$
（章末問題 1 終り）

問 2.1　(1) グラフは下図。　A(3, 3), B(−3, 5), C(−1, −2)　(2) 19

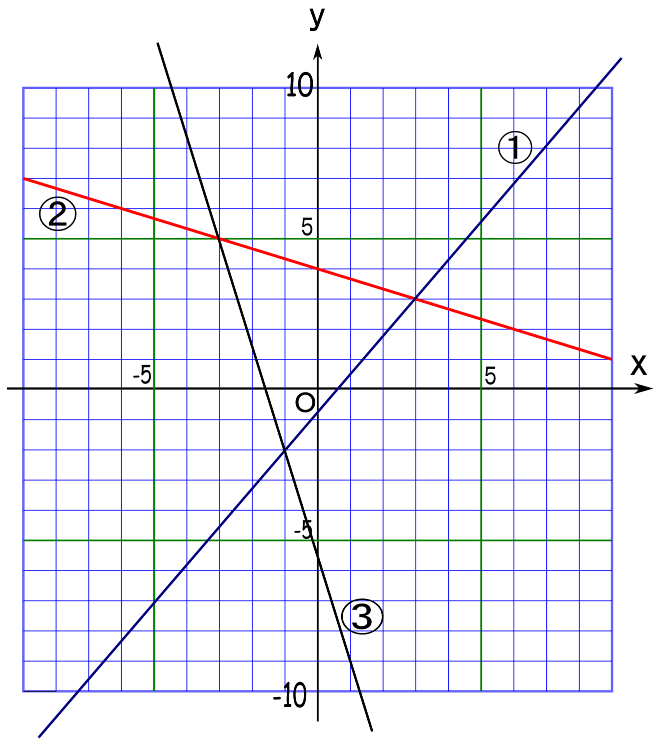


図 問2.1

問 2.2　(1) $y = 2x + 13$　(2) $y = -x + 5$　(3) $a = -\frac{21}{2}$

問 2.3　(1) $a = \frac{1}{3}$　(2) $m = \frac{4}{15}$,　$n = -\frac{8}{5}$　(3)　13 : 6

問 2.4　$a = \frac{1}{2}$

章末問題２

問１． (1) $y = -2x - 2$　(2) $y = \frac{5}{2}x + 3$,　面積 $\frac{9}{5}$.　(3) (i) A$(a, 0)$, B$(b, 0)$.　(ii) $a = 5$, $b = 4$.

(4) (i)　$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$　(ii)　面積 8，直線 $y = -6x + 18$.

問２． (1) 点 P を通り x 軸と平行な直線を m，y 軸と平行な直線を n とする。m 上に PA=1 となるように点 A をとる。直線① 上に点 B を ∠PAB= 90° となるようにとると，AB= a である。点 P を中心に，直線 m と① を時計と反対回りに 90° 回転させると，それぞれ直線 n と② に重なる。このとき，△PAB は，図 (1) の △PA'B' に移る。したがって，PA' = 1, A'B' = a なので，直線② は x が a 増えたとき，y の値は 1 減るので傾きは $-\frac{1}{a}(= b)$ である。よって $ab = a\left(-\frac{1}{a}\right) = -1$.

(2) $b = -\frac{1}{a}$ だから，直線② の y の値は x が a 増えたとき，1 だけ減る。(2) の右図のように，直角三角形 P'A'B' を作ったとき，B'A' = a, A'P' = 1 である。直線① の傾きは a なので，PA=1, AB= a となるような直角三角形 PAB を作ることができる（図参照）。直線② を平行移動して，点 P' を点 P に重ねる。このとき，直角三角形 P′A′B′ と直角三角形 PAB は合同で，△P′A′B′ を点 P を中心に反時計回りに 90° 回転させると，△PAB に重なる。したがって，直線① と② は垂直に交わる。

問３． (1) $a = -\frac{1}{4}$,　B(4, −4).　(2)　$24 + 6\sqrt{2}$　(3)　$l = 16$,　直線 $y = \frac{5}{2}x + 6$.

問４．(1)　$a=8$,　B$(-4,2)$,　C$(-4,-2)$　(2)　A$(2,4)$　(3)　$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

問５．　$a=\dfrac{1}{2}$　（章末問題２終り）

問 3.1　(1) $x=6$　(2) $x=4,\ y=-2$　(3) $x=1,\ y=-9$

問 3.2　(1) -5 と 16　(2) $x=70,\ y=13$　(3) $a=\dfrac{23}{9}$

問 3.3　(1) (a)　$0,\ -7$　(b)　$0.5\ ,-0.7$　(c)　$4\pm\sqrt{14}$　(d)　$1\pm2\sqrt{3}$　(e)　$-\dfrac{7}{2},\ \dfrac{13}{2}$　(2)　-2

問 3.4 (1)　A$(-6,9)$,　B$(2,1)$　(2)　P$(2-2\sqrt{1+a},\ 2+a-2\sqrt{1+a}\ )$
(3)　$a=8$,　△APB，△AOB の面積は，共に 12 で等しい。

問 3.5 (1) P$(a,a+2)$, A$(2a,0)$
(2) $a=5$ だから P$(5,7)$．直線 PA の式は $y=-\dfrac{7}{5}x+14.$
(3) $a=1+\sqrt{3}$
問 3.6　BE の長さ：$6-2\sqrt{7}$

章末問題３

問１．(1)　(a)　$x<-\dfrac{1}{3}$　(b)　$x>3$　(c)　$x\leqq7$　(d)　$x\leqq\dfrac{10}{3}$

(2) 2 つの自然数を $m,\ n\ (m>n)$ とすると，連立方程式 $\begin{cases} m-n=5 & \cdots ① \\ mn=84 & \cdots ② \end{cases}$

を得る。これを解いて，答えは　12，7。

(3) 連立方程式 $\begin{cases} m+n=4m+3 & \cdots ① \\ 10n=7(m+n)+47 & \cdots ② \end{cases}$ を解いて，$m=19,\ n=60.$

(4) $a=3$ がわかるので，2 次方程式は $x^2+4x-21=0$．もう 1 つの解は $-7.$

問２．(1) p.27 の解の公式③ を使うと

$$x=\frac{-2b\pm\sqrt{(2b)^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b\pm2\sqrt{b^2-ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

(2)　(a)　$2\pm\sqrt{2}$　(b)　$-2\pm\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$　(c)　$\dfrac{3\pm\sqrt{10}}{2}$

問３．最初にとった ag の食塩水の中の食塩の量は，$\dfrac{8}{100}a$ グラム。もとの食塩水の容器には ag の水が追加され，100g になっていることに注意せよ。この食塩水の食塩の量は,

$$8-\frac{8}{100}a=\frac{8}{100}(100-a)\quad\cdots ①$$

グラム（これは％と同じ）である。この容器からもう 1 度 ag の食塩水をとって ag の水を加えると，とった ag の食塩水の食塩の量は,

$$\frac{1}{100}\frac{8}{100}(100-a)a\quad\cdots ②$$

グラムなので，もとの容器の食塩の量は

$$①\text{-}②=\frac{8}{100}(100-a)-\frac{1}{100}\frac{8}{100}(100-a)a=\frac{8}{100^2}(100-a)^2\quad\cdots ③$$

グラムである。もとの容器の食塩水の濃度が 2 ％なので，③$=2$ がなりたつ。この式は

$(100-a)^2 = 50^2$　となるので，答えは $\underline{a = 50.}$

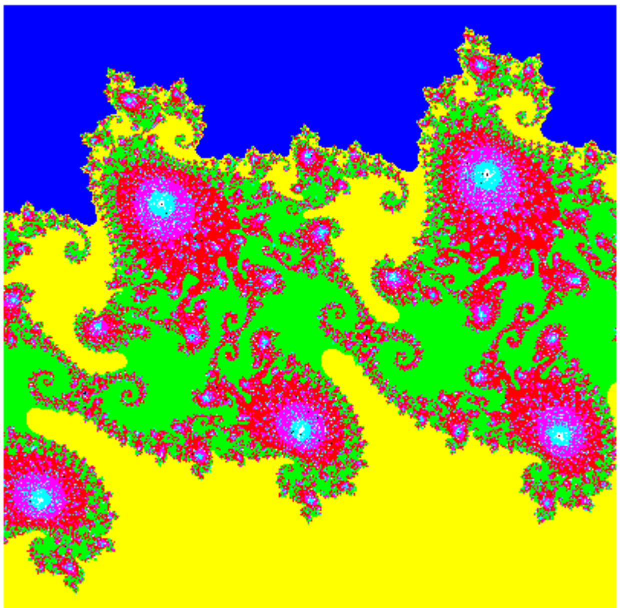
問４． (1) $a = -\dfrac{1}{8}$, $\mathrm{B}(-4, 2)$, $\mathrm{AB} = 4\sqrt{5}$.

(2) 点 P の座標を $\left(p,\ -\dfrac{1}{8}p^2\right)$ とおくと，

$$\mathrm{PA}^2 = \frac{1}{2}p^2 - 8p + 20 + \frac{1}{64}p^4, \qquad \mathrm{PB}^2 = \frac{3}{2}p^2 + 8p + 20 + \frac{1}{64}p^4$$

なので，$\mathrm{PA}^2 = \mathrm{PB}^2$ から，$p^2 + 16p = 0$ を得る。答えは $\underline{\mathrm{P}(-16, -32).}$

(3) 図 3.3 から，$\underline{\mathrm{P}(-4, -2)}$ のとき，△ABP は ∠P= 90° の直角三角形である。
∠A= 90° の三角形があれば，$\mathrm{PA}^2 + \mathrm{AB}^2 = \mathrm{BP}^2$ である。この式は $p^2 + 16p - 80 = 0$ となり，
$p = -20$, を得る。したがって，もう 1 つの答えは　$\underline{\mathrm{P}(-20, -50).}$
∠B= 90° の場合はないことが証明できます。　　　　（章末問題３解答終り）



複素２次関数によるフラクタル図形，熱帯魚